

**INTEGRALDARSTELLUNG
SUPERHARMONISCHER FUNKTIONEN
MIT ANWENDUNG AUF PARABOLISCHE
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

von
Malte Sieveking
aus Hamburg

1967

Digitized by the Internet Archive
in 2026



**INTEGRALDARSTELLUNG
SUPERHARMONISCHER FUNKTIONEN
MIT ANWENDUNG AUF PARABOLISCHE
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Malte Sieveking
aus Hamburg

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 29.11.1967

Dekan: Universitätsprofessor Dr.W.Haupt

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr.H.Bauer

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr.K.Jacobs

Einleitung

- (1) Man stelle sich einen unendlich langen Stab vor - repräsentiert durch die Zahlengerade $\mathbb{R}$ - und zur Zeit $t = 0$ eine Temperaturverteilung f auf $\mathbb{R}$. Wie groß ist die Temperatur $u(x, t)$ im Punkte $x \in \mathbb{R}$ zu einer späteren Zeit $t \geq 0$?

Aus physikalischen Gründen muß u den beiden folgenden Bedingungen genügen:

- (I) u ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ mit $u(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (II) u genügt auf $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ der Wärmeleitungsgleichung

$$Du = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{\partial}{\partial t} u = 0,$$

d.h. u muß Lösung des Randwertproblems (I), (II) sein. Leider ist durch Angabe einer Lösung von (I), (II) die gesuchte Temperaturverteilung noch nicht bestimmt, denn dieses Problem besitzt mehr als eine Lösung. Es ist daher nötig, den Bedingungen (I) und (II) eine Bedingung (III) hinzuzufügen, die physikalisch a priori erfüllt ist, derart daß das Problem (I), (II), (III) höchstens eine Lösung besitzt. Nun sind Temperaturen stets nach unten beschränkt durch den absoluten Nullpunkt; aus physikalischen Gründen gilt daher a priori

- (III) u ist Differenz zweier positiver Lösungen von (II).

Man kann zeigen, daß das Problem (I), (II), (III) höchstens eine Lösung besitzt; für jede Lösung u von (I), (II), (III) gilt nämlich

$$(III') \quad u(x, t) = \int K(x, t, y, 0) f(y) \lambda(dy),$$

wobei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und

$$K(x, t, y, s) = \begin{cases} (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}\right) & \text{für } s < t \\ = 0 & \text{für } s \geq t, \end{cases}$$

und durch eine Darstellung (III) ist u bei vorgegebenem f trivialerweise eindeutig bestimmt.

Allgemeiner kann man fragen:

Welche Funktionen u auf $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ sind von der Form

$$(*) \quad u(x, t) = \int K(x, t, y, s) \mu(dy, s)$$

für ein geeignetes Radonmaß μ auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$,

und ist μ dann durch u eindeutig bestimmt?

D.V. Widder hat in [19] gezeigt, daß alle Differenzen positiver harmonischer Funktionen von der Form (*) sind mit einem von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ getragenen Maß μ . Er bemerkte übrigens auch, daß aus einer Darstellung (*) auf Analytizität der Funktion u in der Variablen x und der Variablen t geschlossen werden kann.

- (2) Nach einem einleitenden Kapitel I mit Bezeichnungen und Hilfsmitteln wird das Darstellungsproblem (*) im Kapitel II und III im Rahmen der axiomatischen Potentialtheorie von H. Bauer für superharmonische Funktionen $u \geq 0$ behandelt. In Kapitel IV werden die Ergebnisse auf lineare parabolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewendet. Der Kern K wird dabei durch die Fundamentallösung gegeben. Im Hinblick auf diese Anwendungen wurde die in der axiomatischen Theorie wichtige Frage, ob ein Kern K mit gewissen Haupteigenschaften einer Fundamentallösung existiert, nicht untersucht, sondern ein

solcher Kern vorgegeben.

Die Existenz eines solchen Kerns ist verknüpft mit der sogenannten Eindeutigkeitshypothese (d.i. zwei Potentiale, die außerhalb ein und desselben Punktes harmonisch sind, sind proportional) und der Existenz eines adjungierten Garbendatums harmonischer Funktionen

- (3) Der Darstellungssatz von Widder für die Wärmeleitungsgleichung wurde von Nicolescu und Foias 1965 für die Dimension 1 und von Mustata 1966 [17] für eine beliebige Dimension in bemerkenswerter Weise verbessert; sie zeigten, daß eine harmonische Funktion u eine Darstellung (III') in einem Streifen $\mathbb{R} \times]0, T[$ besitzt, wenn statt (III) nur vorausgesetzt wird, daß

$$(III'') \quad \sup_{0 < t < T} \int \bar{u}(y, t) e^{-K\|y\|^2} \lambda(dy) < +\infty$$

für ein $K > 0$ mit $4TK < 1$

und $u^- = \max(-u, 0)$.

Im Kapitel IV dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß aus einer Beschränkungsbedingung (III'') folgt, daß u eine negative harmonische Minorante besitzt. Damit ist das Resultat von Nicolescu, Foias und Mustata auf den Satz von Widder zurückgeführt. Wesentlich für den Beweis ist die Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung, daß $u(x, t)$ in t wachsend ist, falls $f \geq 0$ und subharmonisch für

$D_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ist. Diese Eigenschaft ist für den Wärmeausgleich in einer Dimension anschaulich klar; es wäre aber interessant zu wissen, welche sonstigen parabolischen Differentialgleichungen diese Eigenschaft mit der Wärmeleitungsgleichung teilen.

- (4) Auch die Bedingung (I) kann abgeschwächt werden, und zwar mit Hilfe der "co-feinen" Umgebungsfilter $\mathcal{T}_x$; das sind Filter auf $\mathbb{R} \times]0, \infty[$, die feiner sind als die Spuren der Umgebungsfilter von $(x, 0)$ in $\mathbb{R} \times]0, \infty[$. Es ist zwar nicht klar, ob für eine beliebige, λ -meßbare Funktion f

$$(I') \quad \lim_{\mathcal{T}_x} u = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

zusammen mit (II) und (III) ausreicht für eine Darstellung der Form (*). Ausreichend sind (I'), (II), (III), aber unter der zusätzlichen (in (I) enthaltenen) Bedingung

- (IV) u ist am Rande lokalbeschränkt
(präziser: u ist beschränkt auf $V \cap \mathbb{R} \times]0, \infty[$
für jede im Abschluß $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ kompakte Menge V .)

Dies wird in Kapitel III, § 1 im Rahmen der axiomatischen Theorie gezeigt, und zwar durch Übertragung entsprechender für die Brelotsche Theorie von Gowrisankaran [10] bewiesener Resultate.

Mit Hilfe der Filter $\mathcal{T}_x$ kann auch ein Resultat von Widder [14] verallgemeinert werden, wonach eine nicht-negative, auf $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ harmonische Funktion u Null ist, falls

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die verallgemeinernde Bedingung lautet:

$$\liminf_{\mathcal{T}_x} u = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

So formuliert, ist der Satz auch in der axiomatischen Theorie gültig. Für die Darstellungstheorie harmonischer Funktionen hat dieses Resultat fundamentale Bedeutung. In II Satz 4,5 und III Satz 5 werden äquivalente Aussagen gegeben.

- (5) Schließlich noch ein Hinweis auf den funktional-analytischen Aspekt der Sache (auf den in der vorliegenden Arbeit aber nicht weiter eingegangen wird):

Der Kegel $\mathcal{J}_+$ der nichtnegativen superharmonischen Funktionen hat - wenigstens für die in IV untersuchten parabolischen Differentialgleichungen - eine Basis, aber im allgemeinen - und zum Beispiel für die Wärmeleitungsgleichung - keine kompakte Basis. Es ist nicht klar, ob $\mathcal{X}_+$ einen universellen Hut besitzt. Sicherlich besitzt der Kegel $\mathcal{J}_+$ der nichtnegativen superharmonischen Funktionen für die Wärmeleitungsgleichung keinen universellen Hut. $\mathcal{J}_+$ besitzt jedoch - wenigstens für die in IV untersuchten Differentialgleichungen - einen Hut C , der schwach universell ist in dem Sinne, daß jeder extremale Strahl von $\mathcal{J}_+$ mit C einen nichttrivialen Schnitt hat. Die Darstellung (*) erscheint hier als Schwerpunktdarstellung eines Radonmaßes $\tilde{\mu}$ auf $C - \{0\}$; $\tilde{\mu}$ kann im allgemeinen nicht als Radonmaß auf C aufgefaßt werden, und dies scheint der Preis für die Universalität zu sein.

Den Herren Föllmer, Guber, Köhn vom mathematischen Institut in Erlangen und besonders Herrn Professor R.Blumenthal aus Seattle danke ich für viele für mich wertvolle Gespräche.

Herrn Professor Bauer danke ich für die planvolle Forschungsanleitung auf dem Gebiet der axiomatischen Potentialtheorie mit dem Hinblick auf parabolische Differentialgleichungen und die Unterstützung bei dieser Arbeit.

I Bezeichnungen und Hilfsmittel

§0 Bezeichnungen

Sofern nicht eigens eingeführt, sind die Bezeichnungen in dieser Arbeit aus [1] übernommen. Die Bezeichnungen in [1] wiederum schließen sich an Bourbaki an.

Im Folgenden ist $(X, \mathcal{H})$ ein fester, streng harmonischer Raum. Er wird häufig abkürzend auch mit X bezeichnet.

$\mathcal{S}_X$, bzw. $\mathcal{P}_X$ bezeichnen die Menge der nichtnegativen, superharmonischen Funktionen, bzw. der Potentiale auf X .

Für $v \in \mathcal{S}_X$ bedeutet der superharmonische Träger T_v die kleinste abgeschlossene Menge, außerhalb derer v harmonisch ist. Für eine beliebige numerische Funktion f ist dagegen der Träger $S_f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

LKAB steht für: lokalkompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis.

$\mathcal{B}(X)$ bedeutet die Menge der borelmeßbaren Funktionen auf X . Die Indices $b, +$ werden wie folgt verwendet:

$$\mathcal{B}^b(X) = \{f \in \mathcal{B}(X) \mid f \text{ beschränkt}\}, \quad \mathcal{B}_+(X) = \{f \in \mathcal{B}(X) \mid f \geq 0\}$$

Ein Kern V auf $(X, \mathcal{B}(X))$ ist eine positive, numerische Funktion V auf $X \times \mathcal{B}(X)$ mit

1. Die Abbildung $x \longrightarrow V(x, \chi_A)$ liegt in $\mathcal{B}(X)$ für alle A mit $\chi_A \in \mathcal{B}(X)$
(χ_A bedeutet immer die charakteristische Funktion der Menge A).
2. Die Abbildung $A \longrightarrow V(x, \chi_A) = V(x, A)$ ist ein Maß für alle $x \in X$.

Für $f \in \mathcal{B}(X)$ ist dann $Vf(x) = \int f(y) V(x, dy)$, falls die rechte Seite definiert ist.

§1 Topologische Eigenschaften von ${}_+\mathcal{I}_X$

Die folgenden Definitionen und Sätze stammen von G. Mokobodzki. (Beweise finden sich etwa in [18]). (siehe auch [7]) Aus ihnen ergibt sich schon eine abstrakte Integraldarstellung für die Funktionen aus ${}_+\mathcal{I}_X$. Ziel dieser Arbeit ist es jedoch, diese Darstellung unter zusätzlichen Voraussetzungen zu konkretisieren.

Definition der R_v^Φ

Sei $\Phi \geq 0$ eine stetige, beschränkte, reelle Funktion auf X .

Dann wird für jedes $v \in {}_+\mathcal{I}_X$ durch

$$R_v^\Phi(x) = \int_0^{R_v^\Phi(x)} \Phi(t) dt \quad \text{mit} \quad [\Phi > t] = \{x \in X \mid \Phi(x) > t\}$$

eine Funktion $R_v^\Phi \in {}_+\mathcal{I}_X$ definiert. Es gilt $R_v^\Phi \leq v \cdot \sup \Phi$ und R_v^Φ ist harmonisch in $[S_\Phi]$. Es gibt genau ein positives, von S_Φ getragenes Radonmaß ε_X^Φ derart, daß

$$R_v^\Phi(x) = \int v d\varepsilon_X^\Phi \quad \text{für alle } v \in {}_+\mathcal{I}_X.$$

Ein Paar (Φ, x) heißt zulässig, wenn Φ eine beschränkte, stetige, nichtnegative, reelle Funktion auf X ist mit $x \notin S_\Phi$.

Definition der topologischen (uniformen) Struktur T .

Die grösste topologische (uniforme) Struktur auf ${}_+\mathcal{I}_X$, bezüglich der alle Abbildungen $v \rightarrow R_v^\Phi(x)$ ((Φ, x) zulässig) stetig (gleichmäßig stetig) sind, werde mit T bezeichnet. ${}_+\mathcal{I}_X$ läßt sich bezüglich T in natürlicher Weise einbetten in den lokalkonvexen Hausdorffraum der "Differenzen" von Funktionen aus ${}_+\mathcal{I}_X$. Ist $\mu \in \mathcal{M}_0(X)$, so heißt

$$C(\mu) = \left\{ s \in {}_+\mathcal{I}_X \mid \int s d\mu \leq 1 \right\}$$

der zu μ gehörige Hut.

Eigenschaften von T .

- 1) T ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis.
- 2) T ist vollständig (als uniforme Struktur).
- 3) Ist $\mu \geq 0$ ein Radonmaß auf X mit $S_\mu = X$, so ist $C(\mu)$ ein Choquet-Simplex.

- 4) ${}_+ \mathcal{J}_X$ wird von den α_μ aus 3) überdeckt.
- 5) Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ ist die Abbildung $v \longrightarrow \int v d\mu$ nach unten halbstetig.
- 6) Ist $(u_n) \subset {}_+ \mathcal{J}_X$ und $u = T\text{-}\lim_n u_n$, so ist $u = \sup_{h \geq 0} \inf_{f \geq h} u_f$.
- 7) Für jedes $u \in {}_+ \mathcal{J}_X$ und $x \in X$ gilt $u(x) = \sup \left\{ R_u^\Phi(x) \mid (\Phi, x) \text{ zulässig und } \Phi \leq 1 \right\}$.
- 8) Sei $\tilde{X}$ die Einpunktkompaktifizierung von X : $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$. Für harmonische Funktionen h sei (nur an dieser Stelle) $T_h = \{\infty\}$. Ist dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ p_n ein Potential oder eine harmonische Funktion $h \geq 0$ mit $T_{p_n} = \{x\}$ und $x \in \tilde{X}$, so sind folgende Aussagen gleichwertig:
 - a) $p = T\text{-}\lim_n p_n$, $T_p = \{x\}$, $x \in \tilde{X}$
 - b) $x_n \longrightarrow x \in \tilde{X}$, $p_n \longrightarrow p$ lokalgleichmäßig auf $\left[\{x\} \right]$.
- 9) Sei P die Menge aller zulässigen Paare (Φ, x) , für die die Menge $A_\Phi = \{x \in X \mid \Phi(x) < \sup \Phi\}$ relativ kompakt in X ist. Dann ist T die grösste Topologie auf ${}_+ \mathcal{J}_X$, bezüglich der alle Abbildungen $v \longrightarrow R_v^\Phi(x)$ mit $(\Phi, x) \in P$ stetig sind.

Im folgenden sei ${}_+ \mathcal{J}_X$ stets mit der von T induzierten Topologie (uniformen Struktur) versehen.

§2 Co-feine Umgebungsfilter

In diesem Paragraphen soll skizziert werden, wie man die in [10] von Gowrisankaran für die Brelotsche Axiomatik entwickelte Theorie auf die hier zugrunde gelegte Axiomatik übertragen kann.

Definition Eine Funktion $v \in \mathcal{S}_X$ heißt minimal, wenn sie auf einem extremalen Strahl von $\mathcal{S}_X$ liegt.
Eine Teilmenge $E \subset X$ heißt dünn in v , wenn $R_V^E \neq v$.

Der folgende Satz wurde von Gowrisankaran für den Spezialfall einer minimalen harmonischen Funktion s in [9] bewiesen. Man beachte, daß für ein minimales $s \in \mathcal{S}_X$ $T_s = \emptyset$ ist, falls s harmonisch ist, und einpunktig, falls s ein Potential ist.

Satz 1 Sei $s \neq 0$ eine minimale Funktion aus $\mathcal{S}_X$ und E, F dünn in s . Dann ist auch $E \vee F$ dünn in s .

Beweis a) Seien E, F dünn in s und s endlich auf $E \vee F$. Nach [1], Lemma 3.2.1. kann o.B.d.A. angenommen werden, daß E und F fein offen sind. Nach Constantinescu gilt $R_s^E + R_s^F = R_{s+t}^{E \vee F}$ mit $t = \inf(R_s^E, R_s^F)$. ([7a], S. 896) Angenommen, $E \vee F$ wäre nicht dünn in s , d.h. $R_s^{E \vee F} = s$.

Dann wäre

$$R_s^E + R_s^F = s + R_t^{E \vee F} \quad (*)$$

Sei $r \in \mathcal{M}_+(X)$ mit $S_r = X$ und so, daß s ein Extrempunkt von $C(r)$ ist. (s. §1 Eigenschaft 3) Dann liegen auch $R_s^E, R_s^F, R_t^{E \vee F}$ in $C(r)$ und sind Schwerpunkte eindeutig bestimmter, von der Menge der Extrempunkte von $C(r)$ getragener Maße $\mu^E, \mu^F, \mu^{E \vee F}$. Nach (*) gilt

$$\mu^E + \mu^F = \varepsilon_s + \mu^{E \vee F}$$

Daher gibt es entweder ein $\lambda_1 > 0, s_1 \in \mathcal{S}_X$ mit

$$\mu^E = \lambda_1 \varepsilon_s + \mu^{s_1}$$

oder ein $\lambda_2 > 0, s_2 \in \mathcal{S}_X$ mit $\mu^F = \lambda_2 s + s_2$

Sei etwa das erstere richtig, d.h. $R_s^E = \lambda_1 s + s_1$.

Wendet man auf diese Gleichung die Operation R^E an, so ergibt sich

$$R_s^E = \lambda_1 R_s^E + R_s^E \neq \lambda_1 s + s_1 = R_s^E$$

Durch diesen Widerspruch ist die Behauptung bewiesen.

- b) s ist höchstens unendlich auf T_s . Die Mengen $E' = E \setminus T_s$, $F' = F \setminus T_s$ erfüllen dann die Voraussetzungen von a). Also ist $E' \cup F'$ dünn in s . Als Menge von Unendlichkeitsstellen von s ist T_s aber polar. Daher ist nach [1] 2.8.4.

$$s \neq \hat{R}_s^{E' \cup F'} = \hat{R}_s^{E' \cup F' \cup T_s} = \hat{R}_s^{E \cup F}, \text{ also auch } E \cup F \text{ dünn in } s.$$

Ist $s \neq 0$ eine minimale Funktion aus ${}_+ \mathcal{J}_X$, so ist

$$\mathcal{T}_s = \{E \subset X \mid [E \text{ dünn in } x] \text{ nach Satz 1 ein Filter}$$

auf X . Es ist leicht zu zeigen, daß für ein Potential s mit $T_s = \{x\}$ der Filter $\mathcal{T}_s$ feiner ist als der Umgebungsfilter von x .

Definition $\mathcal{T}_s$ heißt der co-feine Umgebungsfilter von s .

Für ein $r \in \mathcal{M}_+(X)$ mit $S_r = X$, $E \subset X$ sei im folgenden

$$\Delta_e(r) = \{s \in C(r) \cap \mathcal{X}_X \mid s \neq 0 \text{ und extremal in } C(r)\}$$

$$\mathcal{E}_E(r) = \{s \in \Delta_e(r) \mid E \text{ dünn in } s\}$$

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lemma 2 in [10]. Der hier gegebene Beweis ist etwas einfacher (ebenso läßt sich der Beweis von Theorem 1 [10] vereinfachen). Man beachte jedoch, daß hier und dort die Topologien auf ${}_+ \mathcal{J}_X$ verschieden definiert sind.

Lemma 1 Sei V eine kompakte Teilmenge von ${}_+ \mathcal{J}_X$. Dann gibt es ein $r_1 \in \mathcal{M}_+(X)$ derart, daß

(a) $S_{r_1} = X$, $\forall C(r_1)$, die Abbildung $v \rightarrow \int v dr_1$ auf V stetig und endlich ist und

(b) $\int v dr_1 < \int w dr_1$ für alle $v, w \in {}_+ \mathcal{J}_X$, für die $v \leq w$, $v \neq w$ und $\int w dr_1 < +\infty$.

Beweis Sei $(\phi_i, z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zulässigen Paaren, so daß $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_{\varepsilon \phi_i}$ dicht liegt in X . Da alle Abbildungen $s \rightarrow R_s^{\phi_i}(z_i)$ stetig sind, ist $\alpha_1 = \sup_{s \in V} R_s^{\phi_i}(z_i) < +\infty$.

Sei $\beta_1 = (2^i \alpha_1)^{-1}$ und $r_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varepsilon_{z_i}^{\phi_i}$.

Dann leistet r_1 das unter (a) Verlangte. Wählt man die (ϕ_i, z_i) zudem noch so, daß die Linearformen $(\varepsilon_{z_i}^{\phi_i})_{i \in \mathbb{N}}$ die Punkte von ${}_+ \mathcal{J}_X$ trennen (§1, Eigenschaft 1)), so genügt r_1 auch (b).

Lemma 2 Es gibt eine K_σ -Menge $F \subset C(r)$ mit

$$\mathcal{E}_E(r) = F \cap \Delta_E(r)$$

Beweis Sei $V = C(r)$ und r_1 gemäß Lemma 1 gewählt. Dann ist E genau dann dünn in einem extremalen $s \neq 0$ aus $C(r_1)$, wenn

$$\int s dr_1^E < \int s dr_1 = 1$$

(Dabei ist r_1^E das zu r_1 und E gehörige gefegte Maß)

Sei $F_0 = \{v \in C(r) \mid \int v dr_1^E < \int v dr_1\}$

$$F = \{\lambda v \mid \lambda > 0, v \in F_0\}$$

Es gilt $\mathcal{E}_E(r) = \Delta_E(r) \cap F$.

Mit F_0 ist auch F eine K_σ -Menge. F_0 aber ist eine K_σ -Menge, da die Abbildung $v \longrightarrow \int v dr_1^E$ nach §1 Eigenschaft 5) auf dem kompakten $C(r_1)$ nach unten halbstetig ist.

Sei nun u eine strikt positive, harmonische Funktion aus $C(r)$ und μ_u das eindeutig bestimmte, von $\Delta_e(r)$ getragene Maß, dessen Schwerpunkt u ist. Nach Gowrisankaran kann man nun mit Hilfe der $(\gamma_h)_{h \in \Delta(r)}$ ein Dirichletproblem wie folgt definieren:

Sei $\sum^u$ die Menge aller nach unten beschränkten Funktionen aus ${}^u\mathcal{K}_X^* = \{v \mid vu \in \mathcal{K}_X^*\}$. Für jede numerische Funktion f auf $\Delta_e(r)$ sei

$\sum_f^u = \{v \in \sum^u \mid \exists \mu_u\text{-Nullmenge } E_v \subset \Delta_e(r), \text{ so daß für alle } h \in \Delta_e(r) \setminus E_v : \liminf_{x \in \gamma_h} v(x) \geq f(h)\}$

$$\overline{\mathcal{K}}_{f,u}(x) = \inf \{v(x) \mid v \in \sum_f^u\}, \quad \underline{\mathcal{K}}_{f,u} = -\overline{\mathcal{K}}_{-f,u}$$

$\mathcal{R}(u)$ = Menge aller numerischen Funktionen auf $\Delta_e(r)$, für die $\overline{\mathcal{K}}_{f,u} = \mathcal{K}_{f,u}$ und $\overline{\mathcal{K}}_{f,u}$ harmonisch auf X . Für $f \in \mathcal{R}(u)$ setzt man $\mathcal{K}_{f,u} = \overline{\mathcal{K}}_{f,u} = \underline{\mathcal{K}}_{f,u}$. Dann gilt:

Satz 2 Jede μ_u -integrierbare Funktion f auf $\Delta_e(r)$ ist Element von $\mathcal{R}(u)$ und es gilt

$$\mathcal{K}_{f,u}(x) = \int f(h) \frac{h(x)}{u(x)} \mu_u(dh) \text{ für alle } x \in X.$$

Zum Beweis: Gowrisankaran geht in [10] von einem Brelot-schen Raum aus. Ersetzt man die dort auftretende Menge

Δ_1 = Menge der minimalen harmonischen Funktionen aus einer kompakten Basis Δ des Kegels $\mathcal{K}_X$ durch $\Delta_e(r)$, so kann man im übrigen die Beweise wörtlich übernehmen.

So erhält man auch:

Satz 3 Für jede μ_u -integrierbare Funktion f auf $\Delta_e(r)$ gilt

$$\lim_{\substack{v, \tau_k}} \int f(h) \frac{h(x)}{u(x)} \mu_u(dh) = f(k) \text{ für } \mu_u\text{-fast alle } k \in \Delta_e(r).$$

Mit Lemma 1 überträgt man aus [10] auch:

Satz 4 Für jedes $v \in \mathcal{J}_X$ gibt es eine μ_u -integrierbare Funktion f auf $\Delta_e(r)$ derart, daß

$$\lim_{\tau_h} \frac{v}{u} = f(h) \text{ für } \mu_u\text{-fast alle } h \in \Delta_e(r).$$

Zum Beweis: Sei $\mathcal{V} = \{v\} \cup C(r)$ und r_1 gemäß Lemma 1 gewählt. Nach der angegebenen Übertragungsmethode erhält man aus Theorem 8 [10] zunächst für das kanonische Maß μ_u^1 von u auf $\Delta_e(r_1)$: es gibt eine μ_u^1 -integrierbare Funktion f_1 auf $\Delta_e(r_1)$ mit

$$\lim_{\tau_h} \frac{v}{u} = f_1(h) \text{ für } \mu_u^1\text{-fast alle } h \in \Delta_e(r).$$

Hieraus folgt die Behauptung mit $f = f_1 \circ \psi$, wenn die Abbildung ψ von $C(r)$ in $C(r_1)$ definiert wird durch

$$\psi(s) = \left(\int s dr_1 \right)^{-1} \cdot s;$$

es ist nämlich $\mu_u^1 = \psi(\mu_u)$ und $\tau_h = \tau_{\psi(h)}$ für alle $h \in \Delta_e(r)$.

II Riesz-Martinsche Darstellung in einem gegebenen Darstellungsraum

§1 Potentiale

Definition Ein Paar (Y, K) heißt Darstellungsraum des harmonischen Raumes $(X, \mathcal{H})$, wenn

- 1) Y LKAB mit X als dichtem Teilraum
- 2) $K: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ borelmeßbar
- 3) für alle $y \in Y$ die Abbildung $x \longrightarrow K(x, y)$ ein Potential ist, das in $\{y\}$ harmonisch ist und für alle $y \in Y \setminus X$ die Abbildung $x \longrightarrow K(x, y)$ harmonisch auf X ist.

Im folgenden wird die Funktion $x \longrightarrow K(x, y)$ wahlweise mit $K(\cdot, y)$ oder mit K_y bezeichnet und

$K_\mu(x) = \int K(x, y) \mu(dy)$ gesetzt für $\mu \in \mathcal{M}(Y)$, sofern die rechte Seite sinnvoll ist. Dann gilt nach 2) für jede offene Teilmenge $U \subset X$

$$(*) \quad R_{K_\mu}^U = \int R_{K_y}^U \mu(dy)$$

woraus folgt, daß K_μ nahezu hyperharmonisch ist.

Ferner ist $R_{K_\mu}^U$ in U nach unten halbstetig. Ist (U_n) eine abnehmende Folge von offenen Umgebungen eines Punktes $x \in X$ mit $\{x\} = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$, so gilt

$$\text{nach 3)} \quad R_{K_y}^{U_n} \uparrow K_y \quad \text{für jedes } y \in Y \text{ und}$$

$$\text{daher} \quad R_{K_\mu}^{U_n} \uparrow K_\mu \quad \text{nach dem Satz von Levi.}$$

Also ist $K\mu \in {}_+\mathcal{X}_X^*$.

Maße $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ können dabei als Radonmaße auf Y aufgefaßt werden, da X nach 1) offen in Y ist (als lokal-kompakter Teilraum von Y ist X der Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von Y ; letztere ist nach 1) $= Y$).

Ist $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ und $K\mu \in {}_+\mathcal{J}_X$, so ist $K\mu$ ein Potential. Dies folgt aus 3) und der Formel (*). Diese Formel zeigt auch, daß $T_{K\mu} \subset S_\mu$, falls $K\mu \in {}_+\mathcal{J}_X$.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Frage zu beantworten, wann eine Funktion $v \in {}_+\mathcal{J}_X$ die Form $K\mu$ hat und wann das Maß μ in dieser Darstellung eindeutig bestimmt ist. Zunächst soll ein Eindeutigkeitskriterium gegeben werden. Dazu nützt:

Lemma 1 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum. Dann ist die Abbildung $\Psi : y \longrightarrow K_y$ von Y in ${}_+\mathcal{J}_X$ borelmeßbar.

Beweis Es genügt zu zeigen, daß $\tilde{\Psi}'(0)$ borelsch ist für alle 0 aus einer Basis der auf $\Psi(Y)$ induzierten Topologie.

Eine solche Basis besteht aus den Mengen

$$O_{K, \varepsilon, y_0, V} = \left\{ K_y \mid \sup_{x \in K} |K(x, y) - K(x, y_0)| < \varepsilon, y \in V \right\}$$

für kompakte K in X mit $K \cap V = \emptyset$, $\varepsilon > 0$, $y_0 \in Y$; V ist dabei eine offene Umgebung von y_0 , falls $y_0 \in X$ und eine offene Umgebung des unendlich fernen Punktes, falls $y_0 \in Y \setminus X$ (I §1, Eigenschaft 8). Es gilt

$$\Psi^{-1}(O_{K, \varepsilon, y_0, V}) = \left\{ y \in Y \mid \sup_{x \in K} |K(x, y) - K(x, y_0)| < \varepsilon \right\} \cap V.$$

Also ist nur zu zeigen, daß die Menge

$$A_\varepsilon = \left\{ y \in Y \mid \sup_{x \in K} |K(x, y) - K(x, y_0)| < \varepsilon \right\}$$

borelsch ist. Aus der geforderten Meßbarkeit von K folgt,

daß die Menge

$$M_{x,\delta} = \{ y \in Y \mid |K(x,y) - K(x,y_0)| \leq \delta \}$$

für jedes $\delta > 0$ borelsch ist in Y .

Sei D eine abzählbare, in K dichte Teilmenge.

Dann ist

$$M_\delta = \bigcap_{x \in K \cap D} M_{x,\delta}$$

borelsch und darum auch

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_\varepsilon - \frac{1}{n}$$

Zum Beweis des folgenden Eindeutigkeitssatzes und zur späteren Definition eines fein-strengen Potentials dient ein Resultat von R.M.Hervé [13], wonach zu jedem Potential p genau ein Kern V_p auf $(X, \mathcal{B}(X))$ existiert, derart daß

- a) $V_p 1 = p$
- b) $V_p f \in {}_+ \mathcal{X}_X^*$ für jedes $f \in \mathcal{B}_+(X)$
- c) $T_{V_p} f \leq S_f$ für jedes $f \in \mathcal{B}_+(X)$

Der in [13] für die Brelotsche Axiomatik geführte Beweis läßt sich ohne weiteres auf die hier zugrunde gelegte übertragen (siehe auch den Beweis von Meyer in [16]). Hieraus ergibt sich:

Lemma 2 Sei (Y,K) ein Darstellungsraum, $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$

und $p = K\mu \in {}_+ \mathcal{I}_X$. Dann gilt

$$V_p f = K(f\mu) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{B}_+(X)$$

Für das weitere gelte die folgende Bezeichnung

$$\Delta = Y \setminus X$$

$$\mathcal{E}(\Delta) = \{ y \in \Delta \mid K_y \text{ ist } \neq 0 \text{ und minimal} \}.$$

Der Eindeigkeitssatz lautet nun :

SATZ 1 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von X ,
 $s \in \mathcal{S}_X$ und μ_1, μ_2 zwei von X u $\mathcal{E}(\Delta)$ getragene
 Maße aus $\mathcal{M}_+(Y)$ mit $K\mu_1 = s = K\mu_2$.
 Dann gilt $\int k d\mu_1 = \int k d\mu_2$ für alle borelmeßbaren
 Funktionen $k \geq 0$ auf Y , für die $k(y) = 0$, falls
 $K_y = 0$ und $k(y_1) = k(y_2)$, falls K_{y_1} zu K_{y_2} proportional.

Beweis a) Für borelmeßbare Funktionen $f \geq 0$ auf X sei

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{auf } X \\ 0 & \text{auf } \Delta \end{cases} \quad \text{und} \\ W_1 f = K \tilde{f} \mu_1 \quad i = 1, 2$$

Nach Lemma 2 gilt dann $W_1 = V_{p(s)} = W_2$ wobei $p(s)$ der
 Potentialteil von s ist.

Sei $A = \{ y \in X \mid K_y \neq 0 \}$. Zu jedem $y \in A$ gibt es ein $x \in X$ mit
 $K(x, y) \neq 0$. Daher gilt auch $K(x, y) \neq 0$ für alle x aus einer Umgebung
 von x . Demnach gilt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ y \in X \mid K(x_n, y) \neq 0 \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

wenn nur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in X dichte Folge ist. Wie bereits
 gezeigt, gilt

$$\int_A K(x_n, y) f(y) \mu_1(dy) = \int_{A_n} K(x_n, y) f(y) \mu_1(dy)$$

für beschränkte, borelmeßbare Funktionen f . Daraus folgt

$$\chi_{A_n \cap X} \cdot \mu_1 = \chi_{A_n \cap X} \cdot \mu_2 \text{ und daraus } \chi_{A_n \cap X} \cdot \mu_1 = \chi_{A_n \cap X} \cdot \mu_2.$$

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen für alle
 borelmeßbaren Funktionen $k \geq 0$ auf Y , die auf Δ verschwinden.

b) Sei nun $h(s)$ der harmonische Teil von s , $\int$ ein
 Maß aus $\mathcal{M}_+(X)$ mit $S_g = X$ und $\int h(s) d\varphi = 1$. Mit $g(y) =$
 $\int K(x, y) \varphi(dx)$ wird durch

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{K(x, y)}{g(y)} & \text{falls } g(y) \neq 0, \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Darstellungsraum (Y, G) von X definiert. Seien

$$\tilde{\mu}_1 = g \chi_{\Delta} \mu_1, \quad \tilde{\mu}_2 = g \chi_{\Delta} \mu_2$$

Dann gilt $G \tilde{\mu}_1 = h(s) = G \tilde{\mu}_2$ und

$$\tilde{\mu}_1(1) = 1 = \tilde{\mu}_2(1)$$

Nach Lemma 1 ist die Abbildung $\psi: y \longrightarrow G(\cdot, y)$ von Y in $G(\mathcal{G})$ borelmeßbar. Da $\tilde{\mu}_1$ und $\tilde{\mu}_2$ beschränkt sind, ist ψ $\tilde{\mu}_1$ -eigentlich und $\tilde{\mu}_2$ -eigentlich (siehe [5]).

Sei $V_1 = \psi(\tilde{\mu}_1)$, $V_2 = \psi(\tilde{\mu}_2)$

und $\mathcal{E}(\mathcal{G}) = \{s \in G(\mathcal{G}) \mid s \neq 0, \text{ harmonisch, extremal}\}$.

Ist L kompakt und $L \cap \mathcal{E}(\mathcal{G}) = \emptyset$, so ist $\psi^{-1}(L) \cap \mathcal{E}(\Delta) = \emptyset$,

also $0 = \tilde{\mu}_1(\psi^{-1}(L)) = \tilde{\mu}_2(\psi^{-1}(L))$, also $V_1(L) =$

$V_2(L) = 0$. Also werden V_1 und V_2 von $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ getragen.

Da beide Maße denselben Schwerpunkt $h(s)$ haben, gilt nach dem Eindeutigkeitssatz von Choquet:

$$\int f \circ \psi d\tilde{\mu}_1 = \int f \circ \psi d\tilde{\mu}_2, \quad f \in \mathcal{B}(G(\mathcal{G}))$$

Nun hat jede borelmeßbare Funktion k auf Y , die konstant ist auf Mengen $\{y \in Y \mid K_y \text{ proportional zu } K_{y_0}\}$ und 0 auf $\{y \mid K_y = 0\}$ bis auf eine μ_1 -Nullmenge, die Form $f \circ \psi$. Daher gilt für solche Funktionen

$$\int k \cdot \chi_{\Delta} g d\mu_1 = \int k \cdot \chi_{\Delta} g d\mu_2$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes für alle borelmeßbaren $k \geq 0$, die auf X verschwinden. a) und b) ergeben für ein beliebiges k die Behauptung gemäß der Zerlegung

$$k = \chi_X k + \chi_{\Delta} k.$$

Nun soll die Frage nach der Existenz einer Darstellung behandelt werden. Ein Radonmaß r 0 auf X heiße im folgenden Bezugsmaß, wenn $S_r = X$.

Lemma 3 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum und r ein Bezugsmaß derart, daß $\int K(x, y) r(dx) \leq 1$ für alle y aus einer offenen Teilmenge V von X . Ist dann $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Bernoulli-konvergente Folge von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b(Y)$ mit Limes μ , so daß

- 1) $S_{\mu_n}, S_{\mu} \subset V$
 - 2) $u_n = K_{\mu_n} \in \mathcal{J}_X^+, u_n \xrightarrow{T} u \in \mathcal{J}_X^+$
 - 3) $y \mapsto K_y$ stetig in allen Punkten aus dem Komplement einer μ -Nullmenge,
- so ist $u = K_{\mu}$.

Beweis Für $y \in V$ ist $K_y \in C(r)$. Aus der Stetigkeit der Linearform ε_z^Φ für zulässiges (Φ, z) und der Kompaktheit von $C(r)$ folgt die Beschränktheit der Funktion

$$\psi(y) = \int K(x, y) \varepsilon_z^\Phi(dx) \text{ auf } V. \text{ Wegen der Voraussetzungen}$$

1) und 3) sind damit die Bedingungen des Satzes 22 §5, Chap.IV von [4] erfüllt.

Dieser Satz ergibt dann

$$\int \psi d\mu = \lim_n \int \psi d\mu_n$$

Sei
$$w(x) = \int K(x, y) \mu(dy).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int w d\varepsilon_z^\Phi &= \iint K(x, y) \varepsilon_z^\Phi(dx) \mu(dy) = \int \psi(y) \mu(dy) = \\ \lim_n \int \psi(y) \mu_n(dy) &= \lim_n \iint K(x, y) \varepsilon_z^\Phi(dx) \mu_n(dy) = \\ \lim_n \int u_n d\varepsilon_z^\Phi &= \int u d\varepsilon_z^\Phi; \end{aligned}$$

dabei gilt die letzte Gleichung wegen Voraussetzung 2).

Wegen der Beliebigkeit von (Φ, z) folgt nach I §1

Eigenschaft 7 : $w = u$.

Definition Ein Potential p heißt fein-streng, wenn

- (1) zu jedem $v \in \mathcal{F}_X$ eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{B}_+^b(X)$ existiert mit $v_p f_n \uparrow v$

Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ heißt feines Bezugsmaß eines Darstellungsraumes (Y, K) , wenn $K\mu$ ein fein-strenges Potential ist.

Zur Erläuterung dieser Definition :

Bemerkung 1 Für ein fein-strenges Potential p gilt

- (2) $\mathcal{K}(X) \subset \overline{v_p(\mathcal{B}^b(X))}$ (bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz)

Beweis. O.B.d.A. kann $1 \in \mathcal{F}_X$ angenommen werden. Nach Approximationssatz 2.7.4 aus [1] genügt es zu zeigen, daß zu jedem stetigen, reellen Potential q mit kompakten Träger T_q und jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in \mathcal{B}_+^b(X)$ existiert mit $|q - v_p f| < \varepsilon$. Nach (1) gibt es eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{B}_+^b(X)$ mit $v_p f_n \uparrow q$. Für eine relativ kompakte offene Umgebung U von T_q betrachte man die Folge $v_p(f_n \chi_U)$ ($n \in \mathbb{N}$). Diese Folge ist relativ kompakt in $\mathcal{F}_X$ und zu jedem Häufungspunkt q_1 gibt es einen Häufungspunkt q_2 der Folge $v_p(f_n \chi_U)$ ($\mathbb{N} \ni n$) mit $q_1 + q_2 = q$. Da q_1 in U harmonisch ist, q aber in $\mathcal{F}_q$ folgt hieraus, daß $q_1 = 0$ ist. Daher konvergiert die Folge $v_p(f_n \chi_U)$ auf U lokalgleichmäßig gegen 0. Für hinreichend großes n ist also auf T_q

$$\begin{aligned} v_p(f_n \chi_U) &\leq \varepsilon \quad \text{und} \\ q &\leq v_p(f_n) + \varepsilon \quad (\text{nach dem Satz von Dini}) \\ \text{also} \quad q &\leq v_p(f_n \chi_U) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Aus dem Dominationsprinzip folgt daher

(*) $v_p(f_n \chi_U) \leq q \leq v_p(f_n \chi_U) + 2\varepsilon$ auf ganz X , womit der Beweis von (2) beendet ist. Ist p überdies stetig und reell, so ist $v_p f$ stetig und reell für jedes $f \in \mathcal{B}^b(X)$.

Es gilt dann

$$(3) \mathcal{K}(X) \subset \overline{v_p(\mathcal{K}(X))}$$

Beweis. Man betrachte die Ungleichung (*). Es gilt

$$v_p(f_n \chi_U) = \inf_{\psi \in \mathcal{F}} v_p \psi \quad \text{wobei}$$

$\mathcal{F} = \{ \psi \mid \text{nach unten halbstetig, } \psi \geq f_n \chi_U, \psi \leq \alpha \chi_U \text{ für ein } \alpha > 0 \}$

Da $V_p \psi$ stetig ist für alle $\psi \in \mathcal{J}$, folgt aus dem Satz von Dini die Existenz eines $\psi \in \mathcal{J}$ mit

$$V_p \psi \leq V_p f_n \chi_U + \varepsilon \text{ auf } \overline{U}. \text{ Also gilt}$$

$$(**) \quad V_p f_n \chi_U \leq V_p \psi \leq V_p (f_n \chi_U) + \varepsilon \text{ auf ganz } X.$$

Ähnlich folgt die Existenz eines $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ mit

$$(***) \quad V_p \varphi \leq V_p \psi \leq V_p \varphi + \varepsilon$$

Kombination von (*), (**) und (***) ergibt

$$|q - V_p \varphi| \leq 4\varepsilon. \text{ Damit ist (3) bewiesen.}$$

Nun geht aus der Arbeit von Hansen [12] hervor, daß aus (3) und $1 \in \mathcal{J}_X$ folgt:

- (4) Es gibt eine stark stetige Halbgruppe (P_t) von submarkoffschen Kernen auf $(X, \mathcal{B}(X))$ derart, daß

$$V_p f = \int_0^\infty P_t f dt$$

und $\mathcal{K}_X^{o*}$ genau die Menge der P_t -exzessiven Funktionen ist.

Aus (4) folgt aber wiederum (1) aufgrund eines bekannten Satzes über exzessive Funktionen ([15], T64)

Es ist leicht zu sehen, daß f für ein fein-strenges Potential p gilt:

- (5) Für jedes $x \in X$ und jede fein offene Umgebung O von x gilt $R_p^{tO}(x) < p(x)$.

Unter Benutzung der Theorie der additiven Funktionalen und Zeittransformationen Markoffscher Prozesse läßt sich über (4) zeigen, daß für stetige Potentiale p (1) und (5) sogar gleichbedeutend sind. Ein direkter Beweis für diese Kennzeichnung mittels Balayage wäre wünschenswert.

Lemma 4 Sei p ein fein-strenges Potential, $s \in \mathcal{F}_X$ und (V_n) eine Folge offener Teilmengen von X mit $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ und $R_s^{V_n} = s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Folge beschränkter, borelmeßbarer Funktionen $f_n \geq 0$, derart daß $T\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} V_p f_n = s$, $V_p f_n \leq s$, $f_n(\{V_n\}) = \{0\}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Beweis Zujedem n gibt es eine Folge von Potentialen $(p_l^n)_{l \in \mathbb{N}}$

mit

$$R_{p_l^n}^{V_n} = p_l^n \quad \text{und} \quad p_l^n \uparrow s \quad \text{für} \quad l \rightarrow \infty.$$

Zujedem (n, l) gibt es dann eine Folge beschränkter, borelmeßbarer Funktionen $f_k^{n, l} \geq 0$ mit

$$V_p f_k^{n, l} \uparrow p_l^n \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty$$

$$\text{Sei } q_k^{n, l} = V_p(f_k^{n, l} \chi_{V_{n-1}}) \quad , \quad r_k^{n, l} = V_p(f_k^{n, l} \chi_{V_{n-1}})$$

$$\text{Dann gilt } q_k^{n, l} \leq p_l^n \leq s \quad , \quad r_k^{n, l} \leq s$$

Daher kann O.B.d.A. angenommen werden, daß beide Folgen konvergieren: (nach I §.1 Eigenschaft 3 und 4 sind sie nämlich relativ kompakt.)

$$q_1^n = T\text{-}\lim_k q_k^{n, l} \quad , \quad r_1^{n, l} = T\text{-}\lim_k r_k^{n, l} \quad , \quad q_1^n + r_1^n = p_1^n$$

Als T-limes einer Folge von in V_{n-1} harmonischen Funktionen ist r_1^n harmonisch in V_{n-1} . Mit p_1^n ist aber auch r_1^n harmonisch in V_n . Also ist r_1^n harmonisch in X und wegen $r_1^n \leq p_1^n$ also Null.

$$\text{Mit } g_k^{n, l} = f_k^{n, l} \chi_{V_{n-1}} \quad \text{gilt daher}$$

$$p_1^n = T\text{-}\lim_k V_p g_k^{n, l} \quad , \quad V_p g_k^{n, l} \leq p_1^n \quad , \quad g_k^{n, l}(\{V_{n-1}\}) = 0$$

$$\text{Sei nun } (F_n) \text{ eine Umgebungsbasis von } s \text{ mit } F_n \supset F_{n-1}.$$

Zu jedem n gibt es dann ein $l(n)$, $k(n)$ mit

$$V_p g_{k(n)}^{n, l(n)} \in F_n$$

Setzt man $f_{n-1} = g_{k(n)}^{n, l(n)}$, so leistet (f_n) das Verlangte.

Definition Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von X . Ein $v \in \int_+^0 X$ heißt K-regulär, wenn es ein Kompaktum $A \subset Y$ gibt, so daß

- (1) $R_v^{V \wedge X} = v$ für jede Umgebung V von A in Y .
- (2) $y \longrightarrow K_y$ stetig in jedem Punkt aus A .
- (3) $K_y \not\equiv 0$ für alle $y \in A$.

Eine Menge A mit den Eigenschaften (1) - (3) heiße K-Träger von v .

Satz 2 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von X , r ein Bezugsmaß, E eine μ_0 -Nullmenge und v eine r -integrierbare, K -reguläre Funktion mit einem K -Träger A

$$\begin{aligned} &\text{und} \\ &\int K(x, y) r(dx) \leq 1 \quad \text{für alle } y \text{ aus einer Umgebung } V \\ &\text{von } A \text{ und} \\ &\int K(x, y) r(dx) = 1 \quad \text{für alle } y \in E \cap V. \end{aligned}$$

Dann gibt es ein $\mu_v \in \mathcal{M}_+(Y)$ mit $v = K\mu_v$ und $S\mu_v \subset A$.

Beweis Sei $p = K\mu_0$ und (V_n) eine Folge offener Umgebungen von A mit $A = \bigcap_n V_n$ und $\overline{V_{n+1}} \subset V_n \subset V$ ($n \in \mathbb{N}$). Nach Lemma 4 gibt es eine Folge beschränkter, borelmeßbarer Funktionen $f_n \geq 0$ auf X , so daß

$$T\text{-}\lim_n \int p f_n = v, \quad \int p f_n \leq v, \quad f_n(\{V_n\}) = 0 \quad \text{für alle } n.$$

Nach Lemma 2 ist aber $\int p f_n = K(f_n \mu_0)$. Sei $\mu_n = f_n \mu_0$.

Wegen

$$\begin{aligned} \int v dr &\geq \int \int p f_n dr = \int \int K(x, y) \mu_n(dy) r(dx) = \\ &= \int \int K(x, y) r(dx) \mu_n(dy) = \int 1 d\mu_n \end{aligned}$$

sind die Maße μ_n ($n \in \mathbb{N}$) gleichmäßig beschränkt. O.B.d.A. kann daher angenommen werden, daß $\mu_n \rightarrow \mu \in \mathcal{M}_+(Y)$ im Sinne der vagen Topologie. Wegen $\mu_n(\{V_n\}) = 0$ gilt $\mu(\{A\}) = 0$. Außerdem ist für $f \in \mathcal{K}_+(Y)$ mit $\chi_A \leq f \leq \chi_{V_n}$

$$\mu(1) = \int f d\mu = \lim_n \int f d\mu_n = \lim_n \mu_n(1).$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt, woraus folgt, daß $v = K\mu$.

Bemerkung 2 Im Beweis von Satz 2 wurde die Bedingung 3 der Definition der K-Regularität nicht benützt. Diese wird erst im folgenden Satz benützt, in dem von einer Integrabilität von v abgesehen wird. In der Tat gibt es im allgemeinen kein Bezugsmaß r , derart daß alle $v \in \mathcal{S}_X$ r -integrierbar sind (d.h. $C(r)$ universeller Hut ist).

Bemerkung 3 Ausnahmemengen E wie im Satz 2 treten auf bei der Konstruktion von Darstellungsräumen (X, K) mit $K\mu_s = s$ für ein vorgegebenes Potential s mit $\int s dr = 1$ (siehe [13]). In den Anwendungen kann $E = \emptyset$ gewählt werden.

Satz 3 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von X mit einem feinen Bezugsmaß μ_v und v eine K -reguläre Funktion mit K -Träger A . Ist dann die Funktionenmenge $\{K_y \mid y \in V\}$ für eine Umgebung V von A relativ kompakt in $\mathcal{S}_X$, so gibt es ein $\mu_v \in \mathcal{M}_+(Y)$ mit $v = K\mu_v$ und $S_{\mu_v} \subset A$.

Beweis Nach Lemma 1, I § 2 gibt es ein Bezugsmaß r , so daß $\mathcal{U} = \{K_y \mid y \in V\} \cup \{v\} \subset C(r)$ und die Abbildung $s \rightarrow \int s dr$ stetig und endlich ist auf $\mathcal{U}$. Sei $f(y) = \int K(x, y) r(dx)$ und

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{K(x, y)}{f(y)} & f(y) \neq 0 \\ 0 & f(y) = 0 \end{cases}$$

Dann ist (Y, G) ein Darstellungsraum von X und $V_0 = (X_V f + X_V) \cdot \mu_v$ ein feines Bezugsmaß und es gilt $\int G(x, y) r(dx) \leq 1$ für alle $y \in V$ und $= 1$ für alle $y \in V \setminus E$ für eine V_0 -Nullmenge $E \subset X$. Ist $f(y_0) \neq 0$, so ist mit $y \rightarrow K_y$ auch $y \rightarrow G_y$ in y_0 stetig und es ist $G_{y_0} \neq 0$. Daher ist v G -regulär. Da v außerdem r -integrierbar ist, folgt aus Satz 2:

$v = G\mu_v$ für ein $\mu_v \in \mathcal{M}_+(Y)$ mit $S_{\mu_v} \subset A$. Für $\mu_v = f\mu_v$ gilt dann

$$v = K\mu_v \quad \text{und} \quad S_{\mu_v} \subset A.$$

Korollar 1 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von X mit einem feinen Bezugsmaß μ_0 . Ist dann die Abbildung $\psi: y \rightarrow K_y$ in einem Punkt $y_0 \in X$ stetig und $\neq 0$ und $\psi(V)$ relativ kompakt in $\mathcal{S}_X$ für eine Umgebung V von y_0 , so sind alle in $\{y_0\}$ harmonischen Potentiale proportional.

Bemerkung 4 Die Stetigkeit von ψ in y_0 in Korollar 1 impliziert die Existenz einer offenen Umgebung V von y_0 und eines $x_0 \in V$ derart, daß

- (1) $K(x_0, y) \neq 0$ für alle $y \in V$.
Hieraus folgt
- (2) V ist enthalten in der kleinsten Absorptionsmenge, die x_0 enthält.

Beweis Sei A_{x_0} die kleinste Absorptionsmenge, die x_0 enthält. Ist $y \in V$, $v \in \mathcal{S}_X$ und $v(y) > 0$, so gibt es eine relativ kompakte Umgebung W von y , derart daß $v > 0$ auf $\bar{W}$ und $\bar{W} \subset V$. Dann gilt $cv \geq K_y$ auf W^* für ein geeignetes $c > 0$. Daraus folgt

$$c v(x_0) \geq R_{K_y}^W(x_0) = K(x_0, y) > 0$$

Für $v = \chi_{A_{x_0}}$ folgt daher $v(y) = 0$. Also ist $y \notin A_{x_0}$.

Nach Constantinescu ([7] Lemma 3.1 und 3.3) folgt aus (2)

(3) Zu jedem $y \in V$ gibt es ein Potential P_y mit $T_p = \{y\}$ und $P_y(x_0) = 1$.
Mit [7], Lemma 3.1 sieht man zudem, daß die Abbildung $y \rightarrow P_y$ in V stetig ist, falls für jedes $y \in V$ alle Potentiale p mit $T_p = \{y\}$ proportional sind.

Korollar 2 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von X mit einem feinen Bezugsmaß, für den die Abbildung $y \rightarrow K_y$ stetig und $\neq 0$ ist auf ganz X .
Dann gibt es zu jedem Potential p auf X genau ein $\mu_p \in \mathcal{M}_+(X)$ mit

$$p = K\mu_p \quad \text{und} \quad S\mu_p \subset T_p.$$

Beweis Sei (U_n) eine aufsteigende Folge relativ kompakter offener Teilmengen von X mit $X = \bigcup_n U_n$ und

$$p_1 = p^{U_1}, \quad p_{n+1} = p^{U_{n+1}} - p^{U_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\text{siehe [1] 5.1.4})$$

Dann gilt $p = \sum_i p_i$

Offenbar genügt es zu zeigen, daß für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $\mu_i \in \mathcal{M}_+(X)$ existiert mit $K\mu_i = p_i$, $S\mu_i \subset T_{p_i}$. Nun ist

$$\overline{U_{i+1} \setminus U_i} = A_i \quad \text{ein } K\text{-Träger von } p_i.$$

Wegen der Stetigkeit von K_y ist $\{K_y | y \in V\}$ relativ kompakt für eine relativ kompakte Umgebung V von A_i .

Die Behauptung folgt daher aus Satz 3 und Satz 1, II.

§2 Nichtnegative harmonische Funktionen

Durch das Korollar 2 zu Satz 3 ist die Frage nach der Darstellbarkeit von Potentialen einigermaßen vollständig beantwortet. Eine ähnliche Beantwortung für harmonische Funktionen erfordert weitere Voraussetzungen über die Menge $\Delta = Y \setminus X$, die unter den bisherigen Voraussetzungen z.B. leer sein kann.

Lemma 5 Ist (Y, K) ein Darstellungsraum, für den ein Bezugsmaß r existiert, so daß K_y r -integrierbar ist für alle $y \in \Delta$, so ist $\mathcal{E}(\Delta)$ borelsch.

Beweis. Setzt man

$$\varphi(y) = \begin{cases} \left(\int K(x, y) r(dx) \right)^{-1} K_y & \text{für } K_y \neq 0 \\ 0 & \text{für } K_y = 0 \end{cases} \quad y \in \Delta$$

so ist φ borelsch nach Lemma 1. Ist $\mathcal{E}(r)$ die Menge der Extrempunkte von $C(r)$, so gilt

$$\mathcal{E}(\Delta) = \bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{E}(r)) \setminus \bar{\varphi}^{-1}(0)$$

Nach I §1 Eigenschaft 1) und 3) ist aber $\mathcal{E}(r)$ eine G_δ -Menge. Daraus folgt die Behauptung.

Lemma 6 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von $X, z \in Y$ und die Abbildung $y \rightarrow K_y$ stetig in z . Dann ist $X \cap V$ nicht dünn in K_z für jede Umgebung V von z in Y .

Beweis Sei W eine relativ kompakte Umgebung von z mit $\bar{W} \subset V$.
Dann gibt es eine stetige Funktion $\tilde{\phi}$ auf Y mit $\chi_W \in \tilde{\phi} \leq \chi_V$, $\sum_{\tilde{\phi}} \subset V$
so daß also

$$R_S^{W \wedge X} \leq R_S^{\tilde{\phi}} \leq R_S^{V \wedge X} \quad \text{gilt für alle } s \in \mathcal{I}_X \text{ und } \phi = \text{Rest } \tilde{\phi}$$

Sei (y_k) eine gegen z konvergente Punktfolge aus X und $x \notin V$.
 (ϕ, x) ist ein zulässiges Paar und daher gilt nach Voraussetzung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{K_{y_k}}^{\tilde{\phi}}(x) = R_{K_z}^{\tilde{\phi}}(x) \leq R_{K_z}^{V \wedge X}(x)$$

Andererseits gilt $K(x, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} K(x, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_{K_{y_k}}^{W \wedge X}(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} R_{K_{y_k}}^{\tilde{\phi}}(x)$

weil $R_{K_{y_k}}^{W \wedge X} = K_{y_k}$ sofern $y_k \in \bar{W} \wedge X$.

Also gilt $K(x, z) = R_{K_z}^{V \wedge X}(x)$ für alle $x \notin V$, also

$$K(x, z) = R_{K_z}^{V \wedge X}(x) \quad \text{für alle } x \in X, \text{ was zu zeigen war.}$$

Satz 4 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von X mit einem feinen
Bezugsmaß, derart daß die Abbildung $y \rightarrow K_y$ stetig
und $\neq 0$ in Punkten aus Δ und die Menge $\{K_y | y \in V\}$ relativ
kompakt in $\mathcal{I}_X$ für eine Umgebung V von Δ .

Dann sind folgende Aussagen gleichwertig :

- (1) Zu jedem $h \in \mathcal{H}_X$ gibt es ein von $\mathcal{E}(\Delta)$ getragenes $\mu_h \in \mathcal{M}_+(\Delta)$
mit $h = K\mu_h$.
- (2) Zu jedem minimalen harmonischen $h \neq 0$ gibt es ein $y \in \mathcal{E}(\Delta)$
und ein $\alpha > 0$ mit $h = \alpha K_y$.
- (3) Aus " $h \in \mathcal{H}_X$, $\hat{R}_h^{V \wedge X} \in \mathcal{P}_X$ für alle relativ kompakten
Teilmengen V von Y " folgt $h = 0$.

Beweis 1) $\Rightarrow$ 3) :

Sei $h \in \mathcal{H}_X$. Nach Voraussetzung gilt

$$h(x) = \int K(x, y) \mu(dy) \quad \text{für ein } \mu \in \mathcal{M}_+(\Delta)$$

Sei V eine offene, relativ kompakte Teilmenge von Y derart, daß

$R_h^{V \wedge X} \in \mathcal{P}_X$. Nach Lemma 6 gilt $K_{y'} = R_{K_{y'}}^{V \wedge X}$ für jedes $y' \in V$.

Daher ist $R_h^{V \wedge X} = \int_V K_y \mu(dy) + \int_{Y \setminus V} R_{K_y}^{V \wedge X} \mu(dy)$

Die Funktion $h^V = \int_V K_y \mu(dy)$ ist harmonisch. Wegen

$h^V \in R_h^{V \wedge X}$ ist $h^V = 0$, also $h = \int_V K_y \mu(dy)$. Ist nun

$\hat{R}_h^{V \wedge X} \in \mathcal{P}_X$ für alle relativ kompakten Teilmengen V von Y , so folgt $h = 0$.

3) $\Rightarrow$ 2) :

Die Bedingung 3) ist äquivalent mit der folgenden :

3') Existiert für $h \in \mathcal{K}_X$ zu jedem $y \in \Delta$ eine Umgebung V von y in Y , derart daß $\hat{R}_h^{V \wedge X} \in \mathcal{P}_X$, so ist $h = 0$.

Ist nun $h \neq 0$ eine minimale harmonische Funktion, so folgt aus 3') die Existenz eines $y \in \Delta$ derart daß $\hat{R}_h^{V \wedge X} = h$ für alle Umgebungen V von y in Y . Also ist h K -regulär mit K -Träger $\{y\}$. Nach Satz 3 gibt es daher ein $\alpha > 0$ mit $h = \alpha K_y$.

2) $\Rightarrow$ 1) :

Sei $h \in \mathcal{K}_X$, V eine Umgebung von Δ derart, daß $\{K_y | y \in V\}$ in $\mathcal{K}_X$ relativkompakt ist und r ein Bezugsmaß, für das $\{K_y | y \in V\} \cup \{h\} \subset C(r)$ und die Abbildung $s \rightarrow \int s dr$ stetig ist auf $\{K_y | y \in V\}$ (siehe I §2 Lemma 1). Dann wird durch

$$\psi(y) = \left(\int K(x, y) r(dx) \right)^{-1} K_y$$

eine stetige Abbildung von Δ in $C(r)$ definiert. Nach Voraussetzung 2) enthält $\psi(\Delta)$ die Menge $\Delta_e(r)$ der Extrempunkte von $C(r)$, die harmonische Funktionen $\neq 0$ sind. Dies ist eine Borelmenge, da $\mathcal{K}_X$ in $C(r)$ abgeschlossen ist.

Nach dem Darstellungssatz von Choquet gibt es nun ein endliches Radonmaß ν_h auf $C(r)$, das von $\Delta_e(r)$ getragen wird und h als Schwerpunkt hat. Nach [2] gibt es dann ein endliches Maß $\lambda_h \in \mathcal{M}_+(\Delta)$, das von $\mathcal{E}(\Delta)$ getragen wird mit $\psi(\lambda_h) = \nu_h$. Sei $f(y) = \int K(x, y) r(dx)$ und $m_X(s) = s(x)$ für $s \in C(r)$.

Dann gilt

$$h(x) = m_X(h) = \int m_X(s) \nu_h(ds) = \int m_X(s) \psi(\lambda_h)(ds) =$$

$$\int m_X(\psi(y)) \lambda_h(dy) = \int K(x, y) \frac{1}{f(y)} \lambda_h(dy)$$

Setzt man $\mu_h = (f)^{-1} \lambda_h$, so gilt $h = K \mu_h$ mit $\mu_h \in \mathcal{M}_+(\Delta)$.

1) siehe [9]

Lemma 7 Sei (Y, K) wie in Satz 4. Ferner sei für y

$\{y\} = \{y' \mid K_{y'} \text{ proportional zu } K_y\}$. Dann ist für jedes $y \in \mathcal{E}(\Delta)$ der Filter $\mathcal{T}_{K_y}$ feiner als der Umgebungsfiler von y .

Beweis. Sei V eine Umgebung von y . Zu zeigen ist daß $\mathcal{T}_V$ dünn ist in K_y . Es genügt, dies für ein offenes, in Y relativ kompaktes V zu tun. Wäre nun $\mathcal{T}_V$ nicht dünn in K_y , so

wäre $(*) \quad R_{K_y}^{\mathcal{T}_V} = K_y$ Nach Lemma 6 gilt

$$(**) \quad R_{K_y}^V = K_y$$

Nun gibt es eine Folge von Potentialen (p_n) mit $p_n \uparrow K_y$.

Aus $(*)$ folgt

$$p_n' = R_{p_n'}^{\mathcal{T}_V} \uparrow K_y \quad \text{Aus } (**) \text{ folgt}$$

$$p_n = R_{p_n}^V \uparrow K_y$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $T_{p_n} \subset V^*$. Sei $A = V \cap \Delta$ und O eine offene, relativ kompakte Umgebung von A . Man betrachte die durch [1] 5.1.4 definierten Folgen $(p_n)_O^0$ und $(p_n)_c^0$. Beide Folgen sind in $\mathcal{T}_X$ relativ kompakt wegen der Beschränkung durch K_y . Jedes Potential $(p_n)_c^0$ hat seinen superharmonischen Träger in der in X kompakten Menge $V \setminus \{O\}$ und wird dort durch K_y majorisiert. Daher ist jeder Häufungspunkt p_c der Folge $(p_n)_c^0$ ein Potential. Zu solch einem p_c gibt es aber ein en Häufungspunkt p der Folge (p_n) mit $p + p_c = K_y$. Daraus folgt $p_c = 0$. Also gilt $T\text{-}\lim (p_n)_c^0 = 0$, also $T\text{-}\lim (p_n)_O^0 = K_y$. Für jede offene Umgebung U von $\overline{O}$ gilt

$$R_{p_n^O}^U = (p_n)_O^0 \quad \text{und ebenso}$$

$$R_{p_n^O}^\Phi = (p_n)_O^0$$

wenn dabei Φ die Restriktion einer stetigen Funktion $\tilde{\varphi}$ auf Y ist mit $\chi_{\overline{O}} \leq \tilde{\varphi} \leq \chi_U$. Da (Φ, x) zulässig ist für jedes $x \notin \overline{U}$ folgt

$$K_y(x) = \lim (p_n)_O^0(x) = \lim R_{p_n^O}^\Phi(x) = R_{K_y}^\Phi(x) \leq R_{K_y}^U(x) \text{ für } x \notin \overline{U},$$

also
$$K_y = R_{K_y}^U$$

Wegen der Beliebigkeit von U ist A ein K -Träger von K_y .
 Nach Satz 3 gibt es daher ein $\mu \in \mathcal{M}_+(\Delta)$ mit $S_\mu \subset A$ und $K_\mu = K_y$. Sei nun $\tilde{V}$ eine Umgebung von Δ derart, daß $\{K_z \mid z \in \tilde{V}\}$ relativ kompakt ist in $\mathcal{K}_X$ und r ein Bezugsmaß, für das $\{K_z \mid z \in \tilde{V}\} \subset C(r)$ und die Abbildung $s \rightarrow \int s d\mu$ stetig ist auf $\{K_z \mid z \in \tilde{V}\}$. Dann ist K_y der Schwerpunkt des Maßes $\psi(\mu)$ auf $C(r)$, wenn dabei

$$\psi(y) = \left(\int K(x, y) r(dx) \right)^{-1} K_y$$

Da K_y nach Voraussetzung minimal ist, folgt $\psi(\mu) = \varepsilon_{K_y}$.
 Also wird μ getragen von $\{y' \mid K_{y'} \text{ prop. zu } K_y\} = \{y\}$
 (nach Voraussetzung), woraus $\mu = \alpha \varepsilon_y$ folgt für ein $\alpha \geq 0$
 im Widerspruch dazu, daß μ von $A \subset V^*$ getragen wird.

Satz 5 Sei (Y, K) wie in Lemma 7; die folgenden Aussagen sind dann gleichbedeutend:

- (1) Zu jedem $h \in \mathcal{K}_X$ gibt es genau ein von $\mathcal{E}(\Delta)$ getragenes Maß $\mu_h \in \mathcal{M}_+(\Delta)$ mit $h = K\mu_h$.
- (2) Zu jedem minimalen $h \neq 0$ gibt es ein $y \in \mathcal{E}(\Delta)$ mit $y = \lim_{\mathcal{T}_h}$

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2)

Sei h minimal $\neq 0$. Dann gibt es nach 1) genau ein von $\mathcal{E}(\Delta)$ getragenes Maß $\mu_h \in \mathcal{M}_+(\Delta)$ mit $h = K\mu_h$.
 Mittels Transport von μ_h in einen geeigneten Hut $C(r)$ (wie im vorangegangenen Beweis) folgt hieraus die Existenz genau eines $y \in \mathcal{E}(\Delta)$ und eines $\alpha > 0$ mit $h = \alpha K_y$. Nach Lemma 7 ist dann $\mathcal{T}_h$ feiner als der Umgebungsfilter von y . Also ist $y = \lim_{\mathcal{T}_h}$

2) $\Rightarrow$ 1)

Nach Satz 4 genügt es zu zeigen, daß zu jedem minimalen $h \neq 0$ ein $y \in \mathcal{E}(\Delta)$ existiert mit $h = \alpha K_y$ für ein $\alpha > 0$.
 Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 1.

Sei also $h \neq 0$ minimal und $y = \lim_{\mathcal{T}_h}$. Jede Umgebung V von y ist dann Element von $\mathcal{T}_h$ und es gilt

$$R_h^{V \times X} = h$$

Daher ist h K -regulär und y ein K -Träger von h . Nach Satz 3 gibt es daher ein $\alpha > 0$ mit $h = \alpha K_y$.

Definition Ein Darstellungsraum (Y, K) von X heißt Martin-Raum von X , wenn

- 1) ein feines Bezugsmaß für K existiert,
- 2) $\{f(y) K_y \mid y \in V\}$ relativ kompakt ist für eine Umgebung V von Δ und ein strikt positives $f \in \mathcal{C}(V)$,
- 3) $y \rightarrow K_y$ stetig und $\neq 0$ in Punkten aus Δ ist,
- 4) zu jedem $h \in {}_+ \mathcal{K}_X$ genau ein von $\mathcal{E}(\Delta)$ getragenes Maß $\mu_h \in \mathcal{M}_+(\Delta)$ existiert mit $h = K \mu_h$.

Die Menge $\Delta = Y \setminus X$ heißt Martin-Rand von X .

Bemerkung 5 Die Forderung, daß der Martin-Rand kompakt sei, ist im allgemeinen nicht verträglich mit den Forderungen 3) und 4). Dies wird am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung klar.

Satz 6 Sei (Y, K) ein Martin-Raum von X . Ist dann $h \in {}_+ \mathcal{K}_X$, $s \in {}_+ \mathcal{F}_X$, s strikt positiv und

$$\liminf_{\mathcal{T}_{K_y}} \frac{h}{s} = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathcal{E}(\Delta), \text{ so ist } h = 0.$$

Beweis Sei μ_h das von $\mathcal{E}(\Delta)$ getragene Maß auf Δ mit $h = K \mu_h$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Die Menge $E_\varepsilon = \{x' \in X \mid h(x') < \varepsilon \cdot s(x')\}$ ist nicht dünn in $y \in \mathcal{E}(\Delta)$. Anderenfalls wäre nämlich

$$E_\varepsilon \in \mathcal{T}_{K_y}, \text{ also } \liminf_{\mathcal{T}_{K_y}} \frac{h}{s} \geq \varepsilon \quad \text{entgegen der Voraussetzung.}$$

Daher ist

$$R_{K_y}^{E_\varepsilon} = K_y \quad \text{für alle } y \in \mathcal{E}(\Delta) \text{ und}$$

$$R_h^{E_\varepsilon}(x) = \int_{\mathcal{E}(\Delta)} R_{K_y}^{E_\varepsilon}(x) \mu_h(dy) = \int_{\mathcal{E}(\Delta)} K(x, y) \mu_h(dy) = h(x).$$

Also ist $h(x) = R_h^{E_\varepsilon}(x) \leq \varepsilon \cdot s(x)$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ ist $h = 0$.

Bemerkung 6 Man kann vermuten, daß eine Art Umkehrung von Satz 6 gilt. Diese Vermutung wird nahegelegt durch Satz 5, III. Ein Schritt in dieser Richtung ist der folgende Satz.

Eine Funktion $h \in \mathcal{H}_X$ heiße K-streng für einen Darstellungsraum (Y, K) , wenn für jedes $y \in \mathcal{E}(\Delta)$ und jedes $F \in \mathcal{T}_K$ die Funktion R_h^F kein Potential ist. Diese Definition ist derjenigen von "fein-streng" ähnlich.

Satz 7 Sei (Y, K) ein Darstellungsraum von X mit den ersten drei definierenden Eigenschaften eines Martin-Raumes. Es existiere eine K-streng Funktion aus $\mathcal{H}_X$. Ferner gelte die Behauptung von Satz 6.

Dann ist (Y, K) ein Martin-Raum von X .

Beweis. Nach Satz 4 und Satz 1 genügt es zu zeigen: ist $h \in \mathcal{H}_X$ und gibt es zu jedem $y \in \Delta$ eine Umgebung V' von y derart, daß $R_h^{V \wedge X} \in \mathcal{P}_X$, so ist $h = 0$. Sei nun $h \in \mathcal{H}_X$ K-streng, $s \in \mathcal{H}_X$ strikt positiv und $s = s_0 + h_0$. Angenommen, es gilt

$$\liminf_{\mathcal{T}_K} \frac{h}{s} = \alpha > 0 \quad \text{für ein } y \in \mathcal{E}(\Delta).$$

Dann gibt es ein $F \in \mathcal{T}_K$ und ein $\alpha' > 0$ mit $h \geq \alpha' s$ auf F . Daher gilt für jede Umgebung V von y :

$$R_h^{V \wedge X} \geq R_h^{V \wedge F} \geq \alpha' R_s^{V \wedge F} \geq \alpha' R_{h_0}^{V \wedge F}$$

Nach Lemma 7 ist $V \wedge F \in \mathcal{T}_K$. Also ist $R_{h_0}^{V \wedge F}$ kein Potential. Andererseits kann V so gewählt werden, daß $R_h^{V \wedge X}$ ein Potential ist. Dies ergibt einen Widerspruch, woraus folgt,

daß $\liminf_{\mathcal{T}_K} \frac{h}{s} = 0$ für alle $y \in \mathcal{E}(\Delta)$. Die Behauptung von Satz 6 impliziert nun $h = 0$.

III Darstellung harmonischer Funktionen als verallgemeinerte Lösungen eines Randwertproblems

§1 Der Martin-Rand

Sei (Y, K) ein Martin-Raum von $(X, \mathcal{A})$. Für Punkte $y \in \mathcal{E}(\Delta)$ sind zwei Filter definiert: der Filter $\mathcal{V}(y)$ der Umgebungen von y in Y und der feinere Filter $\mathcal{T}_{K_y}$. Demgemäß kann man zwei Randwertprobleme betrachten:

1. Randwertproblem (siehe [6])

Sei u eine strikt positive, harmonische Funktion auf X und

$$\mathcal{H}_X^* = \{v \mid vu \in \mathcal{H}_X^*\}$$

Für eine numerische Funktion f auf Δ sei

$$\mathcal{O}_f = \left\{ s \in \mathcal{H}_X^* \mid \begin{array}{l} s \text{ ist nach unten beschränkt; es} \\ \text{gibt eine kompakte Menge } K_s \subset Y, \text{ derart} \\ \text{daß } s \geq 0 \text{ auf } K_s; \text{ es gilt} \\ \liminf_{\substack{x \in X \\ x \rightarrow y}} s(x) \geq f(y) \text{ für alle } y \in \Delta. \end{array} \right\}$$

Wie üblich setzt man $\mathcal{H}_f = \inf_{x \rightarrow y} \mathcal{O}_f$, $\mathcal{H}_f = -\mathcal{O}_f$ und nennt f u-resolutiv, wenn $-\infty < \mathcal{H}_f = \mathcal{H}_f < +\infty$. Für ein resolutives f setzt man $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}_f = \mathcal{H}_f$. Ist jedes $f \in \mathcal{K}(\Delta)$ u-resolutiv, so heißt der Martin-Rand Δ u-resolutiv. Im allgemeinen kann man nicht zeigen, daß Δ resolutiv ist; dies ist anders beim

2. Randwertproblem

Sei wieder u eine strikt positive, harmonische Funktion und μ_u das kanonische Maß von u auf Δ . Im Einklang mit I, §2 setzt man

$$\mathcal{N}_f = \left\{ v \in \mathcal{H}_X^* \mid \begin{array}{l} v \text{ ist nach unten beschränkt; es gibt} \\ \text{eine } \mu_u\text{-Nullmenge } E_v \subset \mathcal{E}(\Delta), \text{ derart daß} \\ \text{für alle } y \in \mathcal{E}(\Delta) \setminus E_v \\ \liminf_{\mathcal{T}_{K_y}} v \geq f(y) \end{array} \right\}$$

$${}^u\overline{J}_f = \inf {}^uN_f, \quad {}^u\underline{J}_f = - {}^u\overline{J}_{-f}$$

f heißt co-fein u-resolutiv, wenn $-\infty < {}^u\overline{J}_f = {}^u\overline{J}_f < +\infty$,
in welchem Falle man ${}^uJ_f := {}^u\overline{J}_f = {}^u\underline{J}_f$ setzt.

Um nun die Beziehung zu dem in I §2 behandelten Randwertproblem herzustellen, sei ein Bezugsmaß ϱ auf X so gewählt, daß die Abbildung $y \rightarrow \int K(x,y) \varrho(dx) =: f(y)$ stetig ist auf Δ und $\int u d\varrho < \infty$. (I §2 Lemma 2) O.B.d.A. kann $\int u d\varrho = 1$ angenommen werden. Dann ist auch die Abbildung

$$\Psi: y \longrightarrow (f(y))^{-1} K_y \text{ stetig von } \Delta \text{ in } C(\varrho).$$

Sie ist überdies ein-eindeutig auf $\mathcal{E}(\Delta)$. Da das System $\{L \cap \mathcal{E}(\Delta) \mid L \text{ kompakt in } \Delta\}$ ein Erzeuger des Systems der borelschen Teilmengen von $\mathcal{E}(\Delta)$ ist, ist die Abbildung

$$\varphi = (\text{Rest}_{\mathcal{E}(\Delta)} \Psi)^{-1} \quad \text{eine meßbare Abbildung}$$

von $\Delta_{\mathcal{E}(r)}$ auf $\mathcal{E}(\Delta)$. Daraus folgt, daß für jede numerische Funktion k auf $\mathcal{E}(\Delta)$

$${}^uN_k = \sum_k {}^u k \circ \varphi \quad (\text{siehe Definition in I, §2})$$

$$\text{also} \quad {}^u\overline{J}_k = \overline{\mathcal{K}}_{k \circ \varphi, u}$$

Ist k (f, μ_u) -integrierbar, so ist $g = k \circ \varphi$ ν_u -integrierbar, wenn dabei $\nu_u = \Psi(f, \mu_u)$ ist. ν_u aber ist das kanonische Maß von u auf $C(\varrho)$. Also ist nach I §2, Satz 2 $g \in \mathcal{R}(u)$ und es gilt (*) :

$${}^uJ_k(x) = \mathcal{H}_{g,u}(x) = \int g(s) \frac{\partial x}{\partial s} \nu_u(ds) = \frac{1}{u(x)} \int k(y) K(x,y) \mu_u(dy).$$

Ferner gilt (**) :

Zu jedem $h \in \mathcal{R}_X$ gibt es eine f, μ_u -integrierbare Funktion g auf

$\mathcal{E}(\Delta)$ mit $\lim_{\overline{J}_{K_y}} \frac{h}{u} = g(y)$ für alle y aus dem Komplement

einer μ_u - Nullmenge. Dies folgt aus I, §2, Satz 4 durch Vorschalten der Abbildung Ψ .

Satz 1 Sei $u \in {}_+\mathcal{H}_X$ strikt positiv und $h \in \mathcal{H}_X$. Es gelte

(1) $\frac{h}{u}$ ist beschränkt auf $L \wedge X$ für jedes Kompaktum $L \subset Y$.

(2) Es gibt ein $s \in {}_+\mathcal{H}_X$ mit $h \geq -s$.

Dann gibt es ein co-fein u-resolutes, μ_u -integrierbares g , so daß

$$h(x) = u(x) \cdot \int_g(x) = \int g(y) K(x, y) \mu_u(dy).$$

Beweis Es ist nur zu zeigen, daß $h(x) = u(x) \int_g(x)$, nach (*).

O.B.d.A. kann $u = 1$ angenommen werden.

(a) Es gibt $h_1, h_2 \in {}_+\mathcal{H}_X$ mit $h = h_1 - h_2$.

Nach Voraussetzung ist nämlich $-h \geq -s$ und daher

$$h_2 = \sup_{\substack{U \text{ offen} \\ \text{rel. } h_1}} H_{\text{Rest } U}^U h_- \leq \inf_{\substack{U \text{ offen} \\ \text{rel. } h_1}} H_{\text{Rest } U}^U s = h(s) < +\infty,$$

wenn dabei $h(s)$ die größte harmonische Minorante von s ist.

Daher ist $h_2 \in {}_+\mathcal{H}_X$ und $h_1 = h + h_2 \in {}_+\mathcal{H}_X$ und $h = h_1 - h_2$.

(b) Nach (**) gibt es eine μ_1 -meßbare Funktion g auf $\mathcal{E}(\Delta)$ mit

$$\lim_{K_y} h = g(y) \text{ für } \mu_1\text{-fast alle } y \in \mathcal{E}(\Delta).$$

Sei $L \subset Y$ kompakt und $h'_L = h + R_s^{L \wedge X}$. Dann ist $h'_L \in {}_+\mathcal{H}_X$. Auf L ist h'_L nach Voraussetzung (1) nach unten beschränkt, auf L nach Voraussetzung (2).

Außerdem ist

$$\liminf_{K_y} h'_L \geq g(y) \text{ für } \mu_1\text{-fast alle } y \in \mathcal{E}(\Delta).$$

Also ist h'_L ein Element von $\mathcal{N}_g$.

Um zu zeigen, daß $h \geq \int_g$, genügt es zu zeigen, daß

$$\inf_{\substack{L \text{ komp.} \\ L \subset Y}} R_s^{L \wedge X} = 0, \text{ oder nur} \\ \inf_{\substack{L \text{ komp.} \\ L \subset Y}} R_{h(s)}^{L \wedge X} = 0.$$

Sei $\mu_{h(s)}$ das kanonische Maß von $h(s)$ auf Δ . Dann gilt

$$R_{h(s)}^{[L \wedge X]}(x) = \int R_{K_y}^{[L \wedge X]}(x) \mu_{h(s)}(dy).$$

Die Behauptung folgt daher aus II, §2, Lemma 7.

- (c) Für kompaktes $L \subset Y$ sei nun $h_L = h - R_{h_1}^{[L \wedge X]}$ mit dem in (a) konstruierten h_1 . Auf L ist $h_L = h - h_1 = -h_2 \leq 0$ und auf L ist $h_L \leq h$, also nach Voraussetzung (1) nach oben beschränkt.

Also gilt $-h_L \in \mathcal{N}_{-g}$. Wie in (b) zeigt man

$$\inf_{\substack{L \subset Y \\ L \text{ kompakt}}} R_{h_1}^{[L \wedge X]} = 0, \text{ also } \sup_{\substack{L \subset Y \\ L \text{ kompakt}}} h_L = h,$$

woraus folgt, daß $h \in \mathcal{N}_g$. Insgesamt ist damit

$$\mathcal{N}_g \leq h \leq \mathcal{N}_g, \text{ also die co-feine Resolutivität von } g \text{ und } h = \mathcal{N}_g \text{ gezeigt.}$$

Aus den Definitionen von $\mathcal{N}_g$ und $\overline{\mathcal{H}}_g$ folgt sofort die Beziehung

$$\overline{\mathcal{H}}_g \leq \mathcal{N}_g \leq \mathcal{N}_g \leq \overline{\mathcal{H}}_g.$$

Unter Beachtung dieser Formel ergibt sich mit einem analogen Beweis:

Satz 2 Sei (Y, K) ein Martin-Raum von $(X, \mathcal{H})$,
 $u, h \in \mathcal{H}_X$ und u strikt positiv. Es sei ferner vorausgesetzt, daß

- (1) $\frac{h}{u}$ sich zu einer stetigen, reellen Funktion g auf Y fortsetzen läßt,
- (2) $h \geq -s$ für ein $s \in \mathcal{H}_X$.

Dann ist $g^* = \text{Rest}_{\Delta} g$ resolutiv, und es gilt

$$h(x) = u(x) \overline{\mathcal{H}}_{g^*}(x) = \int g^*(y) K(x, y) \mu_u(dy)$$

für alle $x \in X$.

§ 2 Der topologische Rand einer offenen Teilmenge

In diesem Paragraphen treten keine Darstellungsräume auf; der topologische Rand einer Menge bezieht sich also stets auf den Grundraum X . Es soll die Frage beantwortet werden, welche von den in einer offenen Teilmenge $U \subset X$ mit nicht-leerem Rand harmonischen Funktionen die Form H_f^U haben. Im Gegensatz zum Fall des Martin-Randes versichert die Theorie des Cauchy-Dirichlet-Problems (siehe [14]) stets die Resolutivität des Randes U^* . Im Anwendungsfall von IV fallen Martin-Rand und topologischer Rand zusammen, so daß man dort vorteilhafterweise die beiden Gesichtspunkte zur Verfügung hat.

Definition Eine offene Teilmenge $U \subset X$ besitze die Eigenschaft (W), wenn aus $h \in \mathcal{H}_U$ und $\lim_{x \rightarrow y} h(x) = 0$ für alle $y \in U^*$ folgt, daß $h = 0$.

Es sei $H(U) = \{ \tilde{h} \in \mathcal{C}(\bar{U}) \mid \text{Rest}_U \tilde{h} \in \mathcal{H}_U \}$,
 $H_+(U) = \{ \tilde{h} \in H(U); h \geq 0 \}$.

Satz 3 U besitze die Eigenschaft (W), und alle Randpunkte von U seien regulär. Für jedes $\tilde{h} \in H(U)$ sind dann gleichbedeutend:

- (a) Mit $h = \text{Rest}_U \tilde{h}$, $h^* = \text{Rest}_{U^*} \tilde{h}$ gilt: h^* ist resolutiv und $h = H_{h^*}$.
- (b) Es gibt ein $h_0 \in H_+(U)$ mit $h \geq -h_0$.

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b). Mit h^* ist auch h_+^* und h_-^* resolutiv, und es gilt $H_{h_+^*}, H_{h_-^*} \in H_+(U)$ nach [14].

Ferner ist $h = H_{h^*} = H_{h_+^*} - H_{h_-^*} \geq -H_{h_-^*}$

Setzt man

$$h_0 = \begin{cases} |h^*| & \text{auf } U^* \\ H_{h^*} + H_{h_-} & \text{auf } U \end{cases}$$

so ist $h_0 \in H_+(U)$ und $h \geq -h_0$.

(b) $\implies$ (a). Sei zunächst $\tilde{h} \in H_+(U)$. Nach [14], Lemma 5 ist h^* resolutiv, und es gilt $H_{h^*} \leq h$. Für resolutive Randfunktionen φ sei

$$g_\varphi = \begin{cases} H_\varphi & \text{auf } U \\ \varphi & \text{auf } U^* \end{cases} \quad \text{und } g = g_{h^*}$$

Dann gilt $g = \sup_{\varphi \in \mathcal{J}} g_\varphi$ mit

$$\mathcal{J} = \{ \varphi \in \mathcal{H}(U^*) \mid \varphi \leq h^* \}$$

Da jedes g_φ mit $\varphi \in \mathcal{J}$ stetig auf $\overline{U}$ ist, ist g nach unten halbstetig auf $\overline{U}$. Andererseits ist

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow z \\ y \in U}} g(y) \leq \limsup_{\substack{y \rightarrow z \\ y \in U}} h(y) = h^*(z) = g(z)$$

für alle $z \in U^*$.

Daher ist $g \in H_+(U)$, also $\tilde{h} - g \in H_+(U)$. Aus Eigenschaft (W) folgt dann, daß $\tilde{h} = g$, d.h. $h = H_{h^*}$.

Nunmehr sei $\tilde{h}$ beliebig. Dann ist $h + h_0 \in H_+(U)$, $h_0 \in H_+(U)$, und es gilt nach dem bereits bewiesenen

$$h + h_0 = H_{h^* + h_0} = H_{h^*} + H_{h_0}, \text{ also } h = H_{h^*}.$$

Satz 4 U besitze die Eigenschaft (W) und $\{U$ sei Absorptionsmenge. Dann ist jeder Randpunkt von U regulär.

Sei $s \in \mathcal{J}_X, \tilde{h} \in H(U)$, $\text{Rest}_U \tilde{h} = h \geq -s$; dann ist

$h^* = \text{Rest}_{U^*} \tilde{h}$ resolutiv, und es gilt $h = H_{h^*}$.

Beweis Jeder Randpunkt von U ist regulär nach [1], [14].

Setzt man $p(y) = \begin{cases} h(y) + s(y) & y \in U \\ 0 & y \notin U \end{cases}$ so ist $p \in \mathcal{P}_X$.

Aus (W) folgt, daß p ein Potential ist. Da $h \leq p$ auf U gilt, ist h eine zu h^* gehörige Unterfunktion im Sinne von [14]. Also gilt $H_{h^*} \geq h$. Setzt man

$$q(y) = \begin{cases} s(y) & y \in U \\ 0 & y \notin U \end{cases}, \text{ so ist wiederum}$$

q ein Potential auf X , und es gilt $h \geq -q$ auf U . Daher ist $h \in \mathcal{O}_{h^*}$, also $h \geq \bar{H}_{h^*}$. Insgesamt folgt $h = H_{h^*}$.

Der folgende Satz zeigt, daß in gewissem Sinne U^* der Martinrand von U ist, falls (W) gilt und U eine Absorptionsmenge ist. Eine präzise Aussage ergibt sich durch Vergleich von Satz 5 und II § 2 Satz 5.

Definition U besitze die Eigenschaft (W'), wenn für jede minimale Funktion $0 \neq h \in \mathcal{H}_U$ ein $y \in U^*$ existiert mit $y = \lim_{\mathcal{T}_h}$

Satz 5 Sei U offen in X . Dann gilt:

Aus (W') folgt (W).

Ist $\{U$ eine Absorptionsmenge, so folgt (W') aus (W).

Beweis $(W') \Rightarrow (W)$. Sei $h \in \mathcal{H}_U$, $\lim_{x \rightarrow y} h(x) = 0$ für alle

$y \in U^*$. Sei μ_h das kanonische Maß von h in einem geeigneten Hut $C(r)$ und s eine strikt positive, stetige Funktion aus $\mathcal{P}_X$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist dann

$E_\varepsilon = \{x \in U \mid h(x) < \varepsilon \cdot s(x)\}$ die Spur in einer offenen Umgebung von U^* . Ist nun $h' \neq 0$ minimal in $\mathcal{H}_U$ mit

$y = \lim_{\mathcal{T}_{h'}} \in U^*$, so ist $E_\varepsilon \in \mathcal{T}_{h'}$. Daher gilt $R_{h'}^{E_\varepsilon} = h'$;

also $\varepsilon s \geq R_h^{E_\varepsilon} = \int R_h^{E_\varepsilon} \mu_h(dh) = \int h' \mu_h(dh) = h$.

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt $h = 0$.

$(W) \implies (W')$. Nun sei noch vorausgesetzt, daß $\{U$ eine Absorptionsmenge ist. Ist $h \neq 0$ minimal in ${}_+ \mathcal{X}_U$, so ist

$$\tilde{h} = \begin{cases} h & \text{auf } U \\ 0 & \text{auf } \{U \end{cases} \quad \text{ein Element von } {}_+ \mathcal{J}_X$$

und harmonisch in $\{U^*$.

Aus (W) folgt, daß $\tilde{h}$ ein Potential ist, und aus der Minimalität von h folgt die Minimalität von $\tilde{h}$. Daher gibt es ein $y \in U^*$ derart, daß h in $\{y\}$ harmonisch ist. Daher ist $y = \lim \mathcal{T}_h$.

Da $\mathcal{T}_h$ die Spur von $\mathcal{T}_{\tilde{h}}$ auf U ist, folgt $y = \lim \mathcal{T}_h$.

IV Anwendungen

§1 Fundamentallösungen

In diesem Paragraphen sei X stets von der Form $X' \times I$, wobei X' ein LKAB und I ein offenes Intervall $] \alpha, \beta[$ mit $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ ist, und es gelte

(F₀) Für jedes $\tau \in I$ ist $A_\tau = \{ (x, s) \in X \mid s \leq \tau \}$ eine Absorptionsmenge.

Definition (K, λ) heißt Fundamentallösung von X , wenn $\lambda \in \mathcal{M}_+(X')$ und (X, K) ein Darstellungsraum von X ist mit

(F₁) Für jedes $\tau \in] \alpha, \beta[$ gibt es eine strikt positive Funktion $f_0 \in \mathcal{C}(X')$ derart, daß $Kf_0 = K((f_0 \lambda) \otimes \varepsilon_\tau)$ harmonisch ist in $U_\tau = \{ (x, s) \in X \mid s > \tau \}$ und

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow (x, \tau) \\ \gamma \in U_\tau}} Kf_0(\gamma) = f_0(x) \quad \text{für alle } x \in X'$$

(F₂) K ist stetig im Komplement der Diagonalen von $X \times X$.

Im Folgenden sei (K, λ) stets eine Fundamentallösung von X und $U_\tau = \{ (x, s) \in X \mid s > \tau \}$ ($\tau \in I$). Funktionen auf $(U_\tau)^*$ werden in natürlicher Weise mit Funktionen auf X' identifiziert. Sei $\alpha < \alpha' < \gamma < \beta$. Es ist klar, daß die Restriktion von (K, λ) auf $X' \times] \alpha', \beta[$ eine Fundamentallösung für diesen Raum darstellt. Dasselbe wird durch Lemma 6 für den Raum $X' \times] \alpha', \gamma[$ gezeigt.

Lemma 1 (a) $H_f^{\tau}(x, t) = \int K(x, t, \xi, \tau) f(\xi) \lambda(d\xi)$ für jedes resolutive f auf $(U_\tau)^*$, $\tau \in I$, $(x, t) \in U_\tau$

(b) $\lim_{U_\tau \ni \gamma \rightarrow (x, \tau)} H_f^{\tau}(\gamma) = f(x)$ für jedes in einem Punkt (x, τ) endliche und stetige resolutive f .

Beweis (a) Für $f \in \mathcal{B}(X')$

$$Kf = K((f\lambda) \otimes \varepsilon_\tau),$$

falls die rechte Seite sinnvoll ist.

Sei nun $|f| \leq \alpha \cdot f_0$ für hinreichend große $\alpha > 0$ mit einem gemäß (F_1) gewählten f_0 . Beachtet man, daß nach (F_0)

$$K(x, t, \xi, \tau) = 0 \quad \text{für } t \neq \tau, \text{ also}$$

$Kf = 0$ in U_τ , so ergibt sich aus (F_1) , daß Kf harmonisch ist im Komplement des Trägers der Funktion

$$\tilde{f}(x, s) = \begin{cases} f(x) & \text{für } s = \tau \\ 0 & \text{für } s \neq \tau \end{cases}$$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{K}_+(X')$, $x_0 \in X'$, $\varepsilon > 0$ und $g = f(x_0)^{-1} f_0$. Dann gibt es eine offene, relativ kompakte Umgebung V von x_0 in X' , derart daß

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) g(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in V$$

$$\text{Sei } v = K(\chi_V(\varphi - \varphi(x_0)g)), \quad w = K(\chi_{V^c}(\varphi - \varphi(x_0)g)).$$

Für hinreichend großes $c > 0$ ist $\chi_V \leq c \cdot f_0$. Daher ist $|v| \leq \varepsilon \cdot c Kf_0$. w ist nach Obigem stetig und $= 0$ in (x_0, τ) . Wegen

$$K\varphi = v + w + \varphi(x_0) \cdot Kg$$

folgt daraus

$$\liminf_{\substack{\gamma \rightarrow (x_0, \tau) \\ \gamma \in U_\tau}} K\varphi(\gamma) \geq \varphi(x_0) - \varepsilon \quad \limsup_{\substack{\gamma \rightarrow (x_0, \tau) \\ \gamma \in U_\tau}} K\varphi(\gamma) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt $\lim_{\substack{\gamma \rightarrow (x_0, \tau) \\ \gamma \in U_\tau}} K\varphi(\gamma) = \varphi(x_0)$.

Da $K\varphi \geq 0$ ist und nach (F_1) harmonisch in U_τ , ist $\text{Rest}_{U_\tau} K\varphi$ eine Oberfunktion von φ im Sinne von [14]. Da $K\varphi$ ein Potential ist auf X , ist $\text{Rest}_{U_\tau} K\varphi$ auch eine Unterfunktion von φ . Also gilt (a).

(b) Nach [14] Satz 2 gilt die Formel (a) für jede resolutive Funktion f auf $(U_\tau)^*$. Ist f endlich und stetig in einem $x_0 \in (U_\tau)^*$, so ist f auf einer offenen, relativ kompakten Umgebung V von x_0 in $(U_\tau)^*$ beschränkt.

Nach dem in (a) Bewiesenen ist

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow (x_0, t) \\ \gamma \in U_\tau}} H^{U_\tau}_{f\chi_V}(y) = 0$$

Wegen $f = f \cdot \chi_V + f \cdot \chi_{\bar{V}}$ genügt es daher zu zeigen, daß

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow (x_0, t) \\ \gamma \in U_\tau}} H^{U_\tau}_{f\chi_V}(y) = f(x_0)$$

Dies folgt aus [14], Satz 3(a), da offenbar $f \cdot \chi_V \in \mathcal{F}_0$.

Lemma 2 Für jedes $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ und jedes $(x, t) \in X$ gilt

$$\lim_{\tau \uparrow t} H^{U_\tau}_{\text{Rest}_{(U_\tau)^*}}(x, t) = \varphi(x, t)$$

Beweis Es genügt, für stetige, reelle Potentiale p auf X zu zeigen, daß

$$\lim_{\tau \uparrow t} R_p^{U_\tau}(x, t) = p(x, t)$$

Offenbar gilt

$$\lim_{\tau \uparrow t} R_p^{U_\tau}(x, t) \leq p(x, t)$$

Sei $O_t = \bar{U}_t$. Dann gilt:

$$R_p^{O_t} = \lim_{\tau \uparrow t} R_p^{U_\tau}$$

Wäre $R_p^{O_t}(x, t) < p(x, t)$, so wäre O_t dünn in (x, t) ,

Da $\bar{U}_t$ nach (F_0) eine Absorptionsmenge ist, ist auch U_t dünn in (x, t) . Da jedes $A_\sigma = \{(x, s) \in X \mid s \leq \sigma\}$ nach (F_0) eine Absorptionsmenge ist für $\alpha < \sigma < t$ folgt

$$\hat{R}_p^{(U_t)^*}(x, t) = 0$$

Also ist auch $(U_t)^*$ dünn in (x, t) .

Insgesamt wäre dann $O_t \cup U_t \cup \{ (U_t)^* \setminus (x, t) \} = X \setminus \{ (x, t) \}$
dünn in (x, t) , was falsch ist nach [1], S.88, Beispiel 1).
Durch diesen Widerspruch ist die Behauptung bewiesen.

Für die Fundamentallösung (K, λ) werden die zugehörigen
Übergangsoperatoren $(Q_t)_{t>0}$ auf X definiert durch

$$Q_t(x, s) = \begin{cases} K(x, s, \{, s-t\}) \varphi(\{, s-t\}) \lambda(d\{) & \text{für } s-t \in I \\ 0 & \text{für } s-t \notin I \end{cases}$$

Lemma 3 Die $(Q_t)_{t>0}$ bilden eine Halbgruppe, d.h.
es gilt

$$Q_{t_1+t_2} = Q_{t_1} \circ Q_{t_2} \quad \text{für } t_1, t_2 > 0$$

Beweis Sei $t_1, t_2 > 0, (x, s) \in X$ und $\varphi_2 \in \mathcal{K}(X')$.

Sei ferner $\tau_2 = s - t_1 - t_2 \in I$ und $\tau_1 = s - t_1$.
Dann ist $p = K((\varphi_2 \lambda) \otimes \varepsilon_{\tau_2})$ ein Potential auf X , das
auf U_{τ_1} harmonisch ist.

Nach Lemma 1, (a) stimmt p auf U_{τ_1} mit der Lösung des
Cauchyproblems zur Randfunktion

$$\varphi_1 = \text{Rest}_{(U_{\tau_1})^*} p \quad \text{überein:}$$

Insbesondere gilt

$$p(x, s) = H_{\varphi_1}^{U_{\tau_1}}(x, s) = \int \varphi_1 d\mu_{(x, s)}^{U_{\tau_1}}$$

Nach Lemma 1, (a) kann diese Gleichung wie folgt
ausgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & \int K(x, s, \xi, s - t_1 - t_2) \varphi_2(\xi, s - t_1 - t_2) \lambda(d\xi) = \\
 & \iint K(x, s, \xi, s - t_1) K(\xi, s - t_1, \xi, s - t_1 - t_2) \cdot \\
 & \varphi_2(\xi, s - t_1 - t_2) \lambda(d\xi) \lambda(d\xi)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist aber auch richtig für

$s - t_1 - t_2 \notin I$.

Sie ist definitionsgemäß gleichbedeutend mit

$$Q_{t_1+t_2} \varphi_2(x, s) = Q_{t_1} \circ Q_{t_2} \varphi_2(x, s) \quad .$$

Korollar 1 Es gilt $K(x, s, \xi, s - t_1 - t_2) =$

$$\int K(x, s, \xi, s - t_1) K(\xi, s - t_1, \xi, s - t_1 - t_2) \lambda(d\xi)$$

Beweis Dies folgt aus (*) und der Stetigkeit von K in ξ .

Lemma 4 Für jedes $v \in {}_+^{\mathcal{J}} X$ gilt

$$(a) \quad Q_t v \leq v, \quad (b) \quad \lim_{t \downarrow 0} Q_t v = v,$$

mit anderen Worten: jedes $v \in {}_+^{\mathcal{J}} X$ ist exzessiv für $(Q_t)_{t > 0}$.

Beweis (a) Folgt unmittelbar aus Lemma 1 (a).

(b) Für jedes $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ folgt aus Lemma 2

$$\lim_{t \downarrow 0} Q_t \varphi(x, s) = \lim_{t \downarrow 0} \int \varphi d\mu_{x, s}^{U_{s-t}} = \varphi(x, s) \quad (x, s) \in X.$$

Sei nun $v \in \mathcal{F}_X$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$

mit $\varphi \leq v$ und $v(x, s) < \varphi(x, s) + \varepsilon$.

Zu $\varphi, (x, s)$, ε gibt es ein t_0 derart, daß für alle $t < t_0$

$$\varphi(x, s) < Q_t \varphi(x, s) + \varepsilon.$$

Also gilt $v(x, s) < Q_t \varphi(x, s) + 2\varepsilon \leq Q_t v(x, s) + 2\varepsilon \leq v(x, s) + 2\varepsilon$.

Lemma 5 Sei λ_1 das Lebesguemaß auf I und p_0 ein stetiges, reelles, strenges Potential auf X . Sei ferner ψ eine stetige, strikt positive, λ_1 -integrierbare Funktion auf I .

Dann ist $\mu_0 = p_0(\lambda \otimes (\psi \lambda))$ ein feines Bezugsmaß.

Beweis Sei $\mu_1 = \lambda \otimes \lambda_1$. Für den Potentialkern W der Halbgruppe $(Q_t)_{t > 0}$, definiert durch

$$W = \int_0^\infty Q_t dt \quad \text{gilt dann}$$

$$W\varphi = K(\varphi, \mu_1) \quad \varphi \in \mathcal{K}(X).$$

Für ein geeignetes $\alpha > 0$ ist $\varphi, \mu_1 \leq \alpha \mu_0$. Um zu zeigen, daß der Kern W eigentlich ist (d.h. Wpentlich ist für alle $\varphi \in \mathcal{K}(X)$), genügt es daher zu zeigen, daß

$$K\mu_0 < +\infty \quad \text{auf } X.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} K/\mu_0(x,s) &= \iint K(x,s,\xi,\tau) p_0(\xi,\tau) \lambda(d\xi) \psi(\tau) \lambda_1(d\tau) \\ &= \int H_{p_0}^U \tau(x,s) \psi(\tau) \lambda_1(d\tau) \\ &\leq p_0(x,s) \int \psi(\tau) \lambda_1(d\tau) < +\infty \end{aligned}$$

nach Voraussetzung.

Da W eigentlich ist, ist ein bekannter Satz über exzessive Funktionen anwendbar [15]. Dieser besagt, daß zu jeder exzessiven Funktion v eine Folge beschränkter, borelmeßbarer Funktionen $\tilde{b}_n$ mit kompaktem Träger existiert mit $\tilde{W}\tilde{b}_n \uparrow v$. Dann wird durch

$$b_n(x,s) = (p_0(x,s) \psi(s))^{-1} \tilde{b}_n(x,s) \quad (n \in \mathbb{N}, (x,s) \in X)$$

eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_+^b(X)$ definiert mit

$$K(b_n/\mu_0) \uparrow v.$$

Wegen Lemma 4 ist die Behauptung damit bewiesen.

Lemma 6 Sei X ein streng harmonischer Raum und U eine offene Teilmenge von X mit nichtleerem Rand. Für jedes $x \in U$ sei $\mu_x^U = 0$ (Dies ist z.B. der Fall, wenn U Vereinigung von Absorptionsmengen ist). Ist dann p ein Potential auf X , so ist $\text{Rest}_U p$ ein Potential auf U , falls

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{z} \\ y \in U}} p(y) < +\infty \quad \text{für alle } z \in U^*.$$

Beweis Sei $p \in \mathcal{P}_X$ und h die kleinste harmonische Minorante von $\text{Rest}_U p$ auf U . Sei ferner

$$f(z) = \lim_{\substack{y \in U \\ y \rightarrow z}} \sup h(y) \quad \text{für } z \in U^* .$$

Dann ist h eine Unterfunktion von f im Sinne von [14], also

$$h \leq H_f^U = 0 .$$

Satz 1 Sei $\alpha' \in I$. Existiert zu jedem $\gamma \in]\alpha', \beta[$ ein $(x_\gamma, \delta_\gamma) \in X$ mit $\gamma < \delta_\gamma$ derart, daß

$$(I) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{K(x, s, \xi, \tau)}{K(x_\gamma, \delta_\gamma, \xi, \tau)} = 0 \quad \text{für alle } (x, s) \in X' \times]\alpha', \gamma[$$

gleichmäßig in $\tau \in]\alpha', \gamma[$, so ist $(X' \times]\alpha', \beta[, K)$ ein Martin-Raum von $X' \times]\alpha', \beta[$.

Beweis Nach Lemma 5 genügt es zu zeigen, daß

(a) zu jedem $h \in {}_+\mathcal{H}_X$ ein von $\mathcal{E}(\Delta)$ getragenes Maß μ_h existiert mit $h = K\mu_h$. (Es ist klar, daß $K_{(\xi, \alpha')}$ auf $X' \times]\alpha', \beta[$ nicht proportional zu $K_{(\xi, \alpha')}$ ist, falls $\xi \neq \eta$; ferner folgt aus (F_2) und Lemma 1 (a), daß für jedes $\xi \in X'$ $K_{(\xi, \alpha')} \neq 0$. Daher ist μ_h nach II, Satz 1 eindeutig bestimmt.)

(b) die Menge $\{ f(\xi, \tau) \cdot K(\cdot, \cdot, \xi, \tau) \mid (\xi, \tau) \in X' \times]\alpha', \beta[\}$ relativ kompakt ist in ${}_+\mathcal{I}_X$ für ein $\gamma \in]\alpha', \beta[$ und ein strikt positives $f \in \mathcal{C}(X' \times]\alpha', \gamma[)$.

Beweis von (a) Sei $h \in {}_+\mathcal{H}_X$, $\gamma \in]\alpha', \beta[$ und x_γ, δ_γ so gewählt, daß (I) gilt.

Ist λ_1^Y das Lebesguemaß auf $[\alpha', \gamma[$ und ψ eine λ_1^Y -integrierbare, strikt positive Funktion auf $[\alpha', \gamma[$, so ist

$$i(\tau) = \int_{\tau}^{\gamma} \psi(t) \lambda_1^Y(dt) \quad \text{eine stetige, antitöne,}$$

reelle Funktion auf $[\alpha', \gamma[$, die in genau einem $\gamma' \in]\alpha', \gamma[$ den Wert 1 annimmt. Es sei

$$j(\tau) = \begin{cases} i(\tau) & \alpha' \leq \tau \leq \gamma' \\ 1 & \gamma' < \tau < \gamma \end{cases}$$

Ferner sei $X^Y = X' \times]\alpha', \gamma[$ und Y^Y die Einpunktkompaktifizierung von $X' \times]\alpha', \gamma[$ mit dem unendlich fernen Punkt ∞ .

Dann wird ein Darstellungsraum (Y^Y, K^Y) von X^Y definiert durch

$$K(\cdot, \cdot, \xi, \tau) = \begin{cases} (j(\tau) K(x_Y, \delta_Y, \cdot, \tau))^{-1} K(\cdot, \cdot, \xi, \tau) & \text{für } (\xi, \tau) \in X' \times]\alpha', \gamma[\\ 0 & \text{für } (\xi, \tau) \in X' \times \{\infty\} \end{cases}$$

(Y^Y, K^Y) ist ein Darstellungsraum von X^Y nach Lemma 6.

Es ist klar, daß K^Y , multipliziert mit $j \cdot K(x_Y, \delta_Y, \cdot, \cdot)$ eine Fundamentallösung auf $X^Y \times (X' \times]\alpha', \gamma[)$ ergibt. Daher existiert nach Lemma 5 ein feines Bezugsmaß auch für K^Y .

Y^Y ist kompakt und die Abbildung $y \rightarrow K_y$ nach Voraussetzung (I) stetig auf $\Delta = Y^Y \setminus X^Y$. Um zu schließen, daß

$$(a') \quad h = K_{\mu_h}^Y \text{ auf } X^Y \text{ für ein } \mu_h \in M_+(\Delta)$$

genügt es daher nach II, Satz 2 und der anschließenden Bemerkung 2 zu zeigen, daß es ein Bezugsmaß r auf X^Y gibt, derart daß

$$(*) \quad \int_{X^Y} K_y^Y dr = 1 \quad \text{für alle } y \in X' \times]\alpha', \gamma[\quad \text{und}$$

$$(**) \quad \text{Rest}_{X^Y} h \quad r\text{-integrierbar ist.}$$

Definiert man r durch

$$r = K(x_Y, \delta_Y, \cdot, \cdot) (\lambda \otimes (\psi \lambda_1^Y)) \quad ,$$

so folgt (*) nach Korollar 1. (**) folgt aus Lemma 1 (a).

Aus (a') folgt nun

$$(a'') \quad h = K\mu_h \text{ auf } X^Y \text{ für ein } \mu_h \in \mathcal{M}_+(\Delta).$$

Beachtet man, daß im Beweisschritt 1) $\Rightarrow$ 3) von Satz 4, II nur $\mu \in \mathcal{M}_+(\Delta)$ verwendet wird, so ergibt sich aus (a'')

$$(a''') \quad h = K\mu_h \text{ auf } X^Y \text{ für genau ein von } \mathcal{E}(\Delta) \text{ getragenes } \mu_h \in \mathcal{M}_+(\Delta).$$

Wegen der Beliebigkeit von γ und der Eindeutigkeit von μ_h folgt hieraus (a).

Beweis von (b) Sei $f(\xi, \tau) = \left(K(x_\xi, \delta_\tau, \xi, \tau) \int_\tau^\beta \psi(s) \lambda_1(ds) \right)^{-1}$

mit einer strikt positiven, λ_1 -integrierbaren Funktion ψ auf $]\alpha', \beta[$ und

$$r = K(x_\gamma, \delta_\gamma, \cdot, \cdot) (\lambda \otimes (\psi \lambda_1)).$$

Dann gilt:

$$\left(\int f(\xi, \tau) K(x, s, \xi, \tau) r(d(x, s)) = 1 \quad \text{für alle } (\xi, \tau) \in X' \times]\alpha', \beta[\right.$$

Die Behauptung folgt somit aus I §1, Eigenschaft 3).

Bemerkung 1 Man beachte, daß die Abbildung $y \rightarrow K_y$ nach Eigenschaft (F_2) der Fundamentallösung stetig ist auch in $X' \times]\alpha', \beta[$. Nach Lemma 5 ist daher Korollar 2 aus Kapitel II anwendbar.

§ 2 Lineare, homogene, parabolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Sei $X' = \mathbb{R}^n$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, $I =]\alpha, \beta[$, $X = X' \times I$ und $\mathcal{X}$ das Garbendatum der zweimal stetig nach $x_1, \dots, x_n$ und einmal stetig nach x_{n+1} differenzierbaren Lösungen der Differentialgleichung $Du = 0$ mit

$$D = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}$$

und auf X definierten Koeffizienten, die den folgenden Bedingungen genügen:

- (α) $a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k \in \{1, \dots, n\})$
- (β) $a_{ik}, \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}, b_i, c \quad (i, k, j \in \{1, \dots, n\})$ sind lokal Hölder-stetig
- (γ) es gibt ein $\lambda > 0$, so daß für jedes $(x, t) \in X$ und jedes $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X'$ mit $\|\xi\| = 1$ gilt:

$$\lambda \leq \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x,t) \xi_i \xi_k$$

- (δ) c ist nach oben beschränkt.

Die bisher gewonnenen Ergebnisse können auf diesen Fall angewendet werden aufgrund der folgenden beiden Sätze von S.Guber :

Satz A $(X, \mathcal{X})$ ist ein streng harmonischer Raum, für den (F_c) gilt.

Satz B Es gibt eine Fundamentallösung (K, λ) ($\lambda = \text{Lebesguemaß auf } \mathbb{R}^n$), so daß zu jedem $[\alpha, \gamma[\in I$ ein $(x_0, \delta) \in X$ existiert mit $\gamma < \delta$ und

$$\lim_{\|t\| \rightarrow \infty} \frac{K(x, s, t, \tau)}{K(x_0, s, t, \tau)} = 0 \quad \forall (x, s) \in \mathbb{R}^n \times]\alpha', \beta[\quad \text{gleich-} \\ \text{mäßig in } \tau \in]\alpha', \beta[$$

Im nächsten Paragraphen werden außerdem noch die ebenfalls von Guber [11] bewiesenen folgenden Sätze benötigt.

Satz C Ist v eine zweimal stetig nach $x_1, \dots, x_n$ und einmal stetig nach x_{n+1} differenzierbare Funktion auf X , so ist

$Dv \leq 0$ genau dann,
wenn $v \in \mathcal{J}_X$.

Satz D Zu jedem $v \in \mathcal{J}_X$ gibt es eine aufsteigende Folge zweimal stetig nach $x_1, \dots, x_n$ und einmal nach x_{n+1} differenzierbarer reeller Funktionen

$v_n \ (n \in \mathbb{N})$ mit

$Dv_n \leq 0$ und $v_n \uparrow v$.

§ 3 Thermisch abgeschlossene Räume

Zusätzlich zu den Voraussetzungen des vorangegangenen Paragraphen werde in diesem Paragraphen vorausgesetzt, daß die Koeffizienten von D nicht von t abhängen.

$$D_0 = D + \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

definiert in natürlicher Weise einen (elliptischen) Differentialoperator auf $\mathbb{R}^n$.

Eine numerische Funktion w auf $\mathbb{R}^n$ heiße D_0 -subharmonisch, wenn auf jeder offenen, relativkompakten Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ eine absteigende Folge (v_n) reeller, zweimal stetig nach $x_1, \dots, x_n$ differenzierbarer Funktionen existiert mit

$$\begin{aligned} D_0 v_n &\geq 0 && \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und} \\ v_n &\downarrow w \end{aligned}$$

Definition Der harmonische Raum $(X, \mathcal{K})$ heißt thermisch abgeschlossen, wenn für jedes D_0 -subharmonische $f \geq 0$ und jedes $\tau \in I$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) \leq H_f^t(x, \tau + t)$$

Für den Rest dieses Paragraphen sei $(X, \mathcal{K})$ thermisch abgeschlossen und (K, λ) eine Fundamentallösung von $(X, \mathcal{K})$ mit der in Satz B behaupteten Eigenschaft.

Es folgt nun eine Verallgemeinerung für subharmonische Funktionen eines bekannten Satzes von Widder [19] (siehe Eigenschaft (W) in Kapitel III, §2), der auch die Idee zum folgenden Beweis gegeben hat.

Satz 2 Sei v eine nichtnegative, subharmonische

Funktion auf $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$, $[\alpha', \gamma] \in \mathbb{I}$, so daß

$$(1) \quad \lim_{(\alpha, s) \rightarrow (\gamma, \alpha)} v(x, s) = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n$$

$$(2) \quad \int_{\alpha'}^{\gamma} K(x_1, t_1, \xi, \alpha) v(\xi, s) \lambda(d\xi) ds < +\infty \quad \text{für ein } x_1 \in \mathbb{R}^n \\ \text{und ein } t_1 \text{ mit } \gamma < t_1$$

dann ist $v = 0$ in $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$

Beweis Sei $F(x, r) = \int_{\alpha'}^r v(x, s) ds$; ist dann $\beta_1 \in]\alpha, \gamma[$,

V eine nichtleere, offene, relativkompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $W = V \times]\alpha', \beta_1[$, so sind nach Lemma 1 und [14] Satz 3 alle $(x, \alpha') \in V \times \{\alpha'\}$ reguläre Randpunkte von W ; deshalb ist $h = H_F^W$ mit

$$f = \begin{cases} v & \text{auf } W^* \cap \mathbb{R}^n \times]\alpha', \beta_1[\\ 0 & \text{auf } W^* \setminus \mathbb{R}^n \times]\alpha', \beta_1[\end{cases}$$

eine harmonische Funktion mit $v \leq h$ und $\lim_{(\alpha, s) \rightarrow (\gamma, \alpha)} h(x, s) = 0$ $\forall (y, \alpha) \in W^*$. Nach Satz D gibt es nun eine aufsteigende Folge (w_n) von zweimal stetig nach $x_1, \dots, x_n$ und einmal stetig nach x_{n+1} differenzierbaren Funktionen aus $\mathcal{F}_W$ mit $0 \leq w_n \uparrow h - v$.

Es gilt

$$\lim_{(\alpha, s) \rightarrow (\gamma, \alpha)} w_n(x, s) = 0 \quad \forall (y, \alpha) \in W^*$$

Daher gibt es eine absteigende Folge (v_n) nichtnegativer, subharmonischer Funktionen, die zweimal stetig nach $x_1, \dots, x_n$ und einmal stetig nach x_{n+1} differenzierbar sind, mit

$$v_n \downarrow v, \quad \lim_{(\alpha, s) \rightarrow (\gamma, \alpha)} v_n(x, s) = 0 \quad ((y, \alpha) \in W^*)$$

$$\text{Sei } F_n(x, s) = \int_{\alpha'}^s v_n(x, r) dr.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_n(x, \cdot) &= v_n(x, \cdot), \\ v_n(x, r) &= \int_{\alpha'}^r \frac{\partial}{\partial t} v_n(x, t) dt \leq \int_{\alpha'}^r (D + \frac{\partial}{\partial t}) v_n(x, t) dt \end{aligned}$$

nach Satz C

$$= (D + \frac{\partial}{\partial t}) \int_{\alpha'}^r v_n(x, t) dt = (D + \frac{\partial}{\partial t}) F_n(x, r)$$

Also gilt $DF_n \geq 0$. Nach Satz C folgt hieraus, daß F auf W subharmonisch ist. Aus der Beliebigkeit von W folgt, daß F auf $R^n \times]\alpha', \gamma[$ subharmonisch ist. Direkt aus der Definition ergibt sich, daß $F(\cdot, r)$ D_0 -subharmonisch ist für $r \in]\alpha', \gamma[$. Daraus folgt

$$F(x, r) \leq f(x) = \sup_{\alpha' < r < \gamma} F(x, r) \quad H_F^{U\alpha}(x, r) = H(x, r) \quad (x, r) \in R^n \times]\alpha', \gamma[$$

Ist $H \in \mathcal{D}_{R^n \times]\alpha', \gamma[}$, so ist F eine Unterfunktion von 0 ,

also $F \leq 0$, also $F = 0$, also $v = 0$.

Es bleibt zu zeigen, daß $H(x, r) < +\infty \quad \forall (x, r) \in R^n \times]\alpha', \gamma[$

Nach Satz B gibt es eine Konstante $c > 0$, derart daß für $(x, r) \in R^n \times]\alpha', \gamma[$, $x_1 \in R^n$, $t_1 > \gamma$

$$(*) \quad K(x, r, \xi, \tau) \leq c \cdot K(x_1, t_1, \xi, \tau) \quad \forall (\xi, \tau) \in R^n \times]\alpha', \gamma[$$

$$\begin{aligned} H(x, r) &= \int_{\alpha'}^{\gamma} H_{v(c, s)}^{U\alpha'}(x, r) ds = \int_{\alpha'}^{\gamma} \int_{\alpha'}^{\gamma} K(x, r, \xi, \alpha') v(\xi, s) \lambda(d\xi) ds \\ &\leq c \cdot \int_{\alpha'}^{\gamma} \int_{\alpha'}^{\gamma} K(x_1, t_1, \xi, \alpha') v(\xi, s) \lambda(d\xi) ds < +\infty \quad \text{nach Voraussetzung (2)} \end{aligned}$$

Satz 3 Sei v eine stetige, nichtnegative, subharmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \times I'$, $I' =]\alpha', \tau[$, $[\alpha', \tau] \subset I$,

$$\sup_{\tau \in I'} \int K(x_1, t_1, \xi, r) v(\xi, r) \lambda(d\xi) < +\infty \quad \text{für ein } x_1 \in \mathbb{R}^n \text{ und ein } t_1 > \tau$$

Dann gibt es eine in $\mathbb{R}^n \times I'$ harmonische Funktion, die v dort majorisiert.

Beweis Sei $r \in]\alpha', \tau[$. Setzt man für $(x, s) \in \mathbb{R}^n \times]r, \tau[$

$$u_r(x, s) = \bar{H}_{v(\cdot, r)}^{U_r}(x, s), \quad v_r = v - u_r \quad \text{und} \quad w_r = \sup(v_r, 0),$$

so ist w_r eine in $\mathbb{R}^n \times]r, \tau[$ subharmonische, nichtnegative Funktion.

$$\text{Wegen } u_r(x, s) = \int K(x, s, \xi, r) v(\xi, r) \lambda(d\xi)$$

$$\leq c(x) \int K(x_1, t_1, \xi, r) v(\xi, r) \lambda(d\xi) < +\infty$$

ist u_r harmonisch in $\mathbb{R}^n \times]r, \tau[$. Nach Lemma 1 (b) ist

$$\lim_{(x, s) \rightarrow (y, \tau)} u_r(x, s) = v(y, r) \quad y \in \mathbb{R}^n, \text{ woraus folgt, da\ss}$$

$$\lim_{(x, s) \rightarrow (y, \tau)} w_r(x, s) = 0 \quad y \in \mathbb{R}^n$$

Aus Satz 2 folgt daher $w_r = 0$, d.h. $u_r \geq v$.

Setzt man

$$\tilde{u}_r = \begin{cases} u_r & \text{auf } \mathbb{R}^n \times]r, \tau[\\ v & \text{auf } \mathbb{R}^n \times [\alpha', \tau] \end{cases}$$

so ist $\tilde{u}_r$ eine stetige, nichtnegative, subharmonische Funktion mit $v \leq \tilde{u}_r$. Ist $\alpha' < r' < r$, so ergibt dieselbe Überlegung, angewendet auf $\tilde{u}_r$ statt v : $\tilde{u}_{r'} \geq \tilde{u}_r$

$$\text{Sei } h = \sup_{\tau \in I'} \tilde{u}_r$$

Die Behauptung folgt dann aus der Ungleichung (*) im vorangegangenen Beweis.

Korollar 2 Sei h harmonisch in $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$, $\alpha < \alpha' < \gamma < \beta$,
 $t_1 > \gamma$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$ und

$$\sup_{\alpha' < r < \gamma} \int K(x_1, t_1, \xi, r) h^-(\xi, r) \lambda(d\xi) < +\infty$$

Dann gibt es genau ein Maß μ_n auf $\mathbb{R}^n$, so daß

$$h = K\mu_n$$

Beweis Nach Satz 2 besitzt $-h^-$ eine negative harmonische Minorante. Die Behauptung folgt dann aus Satz 1 und Satz B.

Korollar 3 Sei h harmonisch in $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$, $\alpha < \alpha' < \gamma < \beta$ und

- (1) $\sup_{\substack{0 \leq t \leq n \\ \alpha' < t < \gamma}} |h(x, t)| < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\epsilon \in]\alpha', \gamma[$
 (2) $\sup_{\alpha' < r < \gamma} \int K(x_1, t_1, \xi, r) h^-(\xi, r) \lambda(d\xi) < +\infty$
 für ein $x_1 \in \mathbb{R}^n$ und ein $t_1 > 0$

Dann gibt es eine resolutive Randfunktion f

$$\text{mit } h = H_f^{U_{\alpha'}}.$$

Beweis Sei f_1 eine strikt positive, stetige, resolutive Randfunktion von $U_{\alpha'}$ und $u = H_{f_1}^{U_{\alpha'}}$. Dann ist $\frac{h}{u}$ beschränkt auf $L \cap \mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$ für jedes Kompaktum L in $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$. Außerdem besitzt h eine negative harmonische Minorante. Nach Satz 1, III gibt es ein μ_u -meßbares g mit $h = K(g, \mu_u)$. Nach Definition von u ist aber $\mu_u = f_1 \cdot \lambda$. Das gesuchte f ist also $= g \cdot f_1$.

Korollar 4 Sei h harmonisch in $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$, $(\alpha < \alpha' < \gamma < \beta)$ und

(1) fortsetzbar zu einer auf $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$ stetigen Funktion $\tilde{h}$,

(2) $\sup_{\alpha' < r < \gamma} \int K(x_1, t_1, \xi, r) h^-(\xi, r) \lambda(d\xi) < +\infty$
für ein $x_1 \in \mathbb{R}^n$ und ein $t_1 > 0$

Dann gilt $h = H_f^{U_{\alpha'}}$ mit $f = \text{Rest}_{(U_{\alpha'})^*} \tilde{h}$.

Beweis h besitzt eine negative harmonische Minorante.

Der Rest folgt analog zum Beweis von Korollar 3 aus Satz 2, III.

Korollar 5 Sind h_1, h_2 harmonisch in $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$, $(\alpha < \alpha' < \gamma < \beta)$

und gilt (1) $\lim_{(x,s) \rightarrow (\gamma, \alpha')} (h_1 - h_2)(x, s) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$

(2) $\int_{\alpha'}^{\gamma} \int (h_1 - h_2)^-(\xi, r) K(x_1, t_1, \xi, r) \lambda(d\xi) < +\infty$
für ein $x_1 \in \mathbb{R}^n$ und ein $t_1 > 0$,

so ist $h_1 = h_2$.

Beweis Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.

Korollar 6 Sei h harmonisch in $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$, $\alpha < \alpha' < \gamma < \beta$ und

(1) $f(y) = \lim_{(x,s) \rightarrow (\gamma, \alpha')} h(x, s)$ eine stetige, resolutive Funktion

(2) $\int_{\alpha'}^{\gamma} \int |h(\xi, r)| K(x_1, t_1, \xi, r) \lambda(d\xi) dr < +\infty$
für ein $x_1 \in \mathbb{R}^n$ und ein $t_1 > 0$.

Dann gilt $h = H_f^{U_{\alpha'}}$.

Beweis Setzt man $h_1 = h$, $h_2 = H_f^{U_{\alpha'}}$, so genügt es nach

Korollar 5 zu zeigen, daß

$$\int_{\alpha'}^{\gamma} |h_2(\xi, r)| K(x_1, t_1, \xi, r) d\xi < +\infty$$

Nun ist $\int_{\alpha'}^{\gamma} \int_{\alpha'}^{\gamma} |h_2(\xi, r)| K(x_1, t_1, \xi, r) d\xi dr =$

$$\int_{\alpha'}^{\gamma} \int_{\alpha'}^{\gamma} H_{|f|}^{U_{\alpha'}}(\xi, r) K(x_1, t_1, \xi, r) d\xi dr = H_{|f|}^{U_{\alpha'}}(x_1, t_1) \cdot (\gamma - \alpha') < +\infty$$

§ 4 Die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Paragraphen sei

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t},$$

also $Du = 0$ die Wärmeleitungsgleichung.

Lemma 7 Für jedes $I =]\alpha, \beta[$ ($-\infty < \alpha < \beta < +\infty$) wird durch

$$K(x, t, \xi, \tau) = \begin{cases} (4\pi(t-\tau))^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x-\xi\|^2}{4(t-\tau)}\right) & \text{für } \tau < t \\ 0 & \text{für } \tau \geq t \end{cases}$$

und durch das n -dimensionale Lebesguemaß λ auf $\mathbb{R}^n$ eine Fundamentallösung von $(X, \mathcal{K})$ definiert. ($X = \mathbb{R}^n \times I$)

Beweis Nach [1] S.56 ist $K(\cdot, \cdot, \xi, \tau)$ ein Potential auf $X = \mathbb{R}^n \times]-\infty, +\infty[$ für jedes $(\xi, \tau) \in X^\infty$. Der dort gegebene Beweis ist auch für die Restriktion auf den Teilraum $\mathbb{R}^n \times]\alpha, +\infty[$ gültig. Daß $K(\cdot, \cdot, \xi, \tau)$ noch Potential bleibt bei Restriktion auf $\mathbb{R}^n \times]\alpha, \beta[$ folgt dann aus Lemma 6. Damit ist gezeigt, daß

$(\mathbb{R}^n \times]\alpha, \beta[, K)$ ein Darstellungsraum von $(X, \mathcal{K})$ ist.

Außerdem gilt $\int K(x, t, \xi, \tau) \lambda(d\xi) = 1$ für alle $(x, t) \in U_\tau, \tau \in]\alpha, \beta[$.

Damit ist (F_1) gezeigt. Die restlichen Eigenschaften einer Fundamentallösung sind trivialerweise gegeben.

Man kann leicht nachprüfen, daß K die in Satz B behauptete Eigenschaft besitzt. Die Ergebnisse von §3 können auf die Wärmeleitungsgleichung angewendet werden aufgrund des folgenden Satzes:

Satz 4 $(X, \mathcal{K})$ ist thermisch abgeschlossen.

Beweis¹⁾ Sei v eine nichtnegative, D_0 -subharmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Da D_0 in diesem Fall der Laplace-Operator ist, gilt

$$(*) \quad v(x) \leq \int v \, d\sigma_{x,r} \quad (r > 0),$$

wenn dabei $\sigma_{x,r}$ dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß auf

$$K_{r,x} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y-x\| = r\} \text{ ist,}$$

das invariant ist gegenüber allen Abbildungen $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|T(y)\| = \|y\|$ und $T(x) = x$. Solche Abbildungen lassen aber auch das Maß

$$K(x, t+\tau, \cdot, \tau) \cdot \lambda = \mu_{(x,t+\tau)}^\tau$$

invariant für jedes $(x, t) \in X$, $\tau \in I$.

Nun liefert eine Desintegration von $\mu_{(x,t+\tau)}^\tau$ nach der Abbildung $y \rightarrow \|x - y\|$ von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\theta_t(dr)$ auf $\mathbb{R}_+$ und eine "hinreichend" meßbare Familie von Mäßen $\tilde{\sigma}_{x,r}$ derart, daß für jedes $r \in \mathbb{R}_+$

$\tilde{\sigma}_{x,r}$ von $K_{r,x}$ getragen wird und

$$\mu_{(x,t+\tau)}^\tau = \int \tilde{\sigma}_{x,r}^{\theta_t} dr.$$

Die Invarianz von $\mu_{(x,t+\tau)}^\tau$ bezüglich der oben beschriebenen Abbildungen zieht diejenige von

1) mitgeteilt von R. Blumenthal

$\tilde{\sigma}_{x,r}$ nach sich für alle r aus dem Komplement einer $\mathcal{Q}_t$ -Nullmenge E . Für $r \notin E$ folgt daher

$$\tilde{\sigma}_{x,r} = \sigma_{x,r}$$

Aus (*) folgt daher $v(x) \leq \int v \, d\mu_{(x,t+\tau)}^\tau$

Bei Identifikation von $\mathbb{R}^n$ mit $(U_\tau)^*$ ist aber

$$\mu_{(x,t+\tau)}^\tau = \mu_{(x,t+\tau)}^{U_\tau}$$

und somit die Behauptung bewiesen.

Bemerkung 2 Der Beweis beruht im wesentlichen auf der Invarianz der Fundamentallösung gegenüber abstanderhaltenden Abbildungen T :

$$\int_A K(x,t,\xi,\tau) \lambda(d\xi) = \int_{TA} K(Tx,t,\xi,\tau) \lambda(d\xi)$$

und der Harmonizität der Konstanten 1 .

Vermutlich gibt es aber noch wesentlich schwächere Bedingungen, die bereits implizieren, daß ein Raum $(X, \mathcal{X})$ thermisch abgeschlossen ist.

Die Anwendung der Resultate von §3 auf die Wärmeleitungsgleichung soll nur an einem Beispiel gezeigt werden:

Korollar 8 Sei h harmonisch in $\mathbb{R}^n \times]\alpha', \gamma[$ ($-\infty < \alpha' < \gamma$) und es gelte

$$(1) \quad \sup_{\alpha' < r < \gamma} \int h^-(\xi, r) \cdot e^{-K\|\xi\|^2} \lambda(d\xi) < +\infty$$

für ein $K > 0$ mit $4K(\gamma - \alpha') < 1$.

Dann gibt es ein $\mu_h \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}^n)$ mit $h = K\mu_h$. Gilt überdies

$$(2) \quad \text{Es gibt ein } f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } f(y) = \lim_{(x,t) \rightarrow (y,\alpha')} h(x,t) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

so gilt $h = H_f^{U_{\alpha'}}$.

Beweis Sei $0 < \delta < \min(\gamma, \frac{1}{4K})$. Wegen

$$K(x, t, \xi, \tau) = (4\pi(t-\tau))^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{\|x - \xi\|^2}{4(t-\tau)}) \quad \text{und}$$

$K(0, -\frac{1}{4K} - \alpha', \xi, \tau) \leq 4\pi(-\frac{1}{4K} - \delta)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp(-K\|\xi\|^2)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\tau \in]\alpha', \alpha' + \delta[$ folgen die Behauptungen nach Korollar 2 und Korollar 4 zunächst nur auf $\mathbb{R}^n_x]\alpha', \alpha' + \delta[$; doch indem man in einem zweiten Schritt α' durch $\alpha' + \delta$ ersetzt, kann man das Verfahren wiederholen und kommt so nach endlich vielen Schritten zu der gewünschten Darstellung.

Die zweite Aussage von Korollar 8 wurde unter großem Rechenaufwand von Mustăţă in [17] bewiesen. Eine analoge Spezialisierung von Korollar 7 liefert die Aussage von Theorem 16 [8] für den Fall der Wärmeleitungsgleichung.

Durch den folgenden Satz wird die Bestimmung der co-feinen Umgebungsfiler auf die der feinen zurückgeführt. Für die allgemeine Theorie des adjungierten Garbendatums, bzw. der Halbgruppen in Dualität, die hinter diesem Satz steht, siehe [13], bzw. [3].

Satz 5 Sei $I =]-\infty, +\infty[$ und ψ die Abbildung von X in X , die durch $\psi(x, t) = (\dot{x}, -t)$ definiert wird. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) E ist dünn in K_y
- (b) $\psi(E)$ ist dünn in $\psi(y)$

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b)

Sei E dünn in K_y , d.h.

$$(I) \quad R_{K_y}^E \neq K_y$$

Da nach [1] , S.79 $\{\psi(y)\}$ polar ist, ist mit $\psi(E) \setminus \{\psi(y)\}$ auch $\psi(E)$ dünn in $\psi(y)$. Daher kann man O.B.d.A. $y \in E$ annehmen. Da K_y in $\{\psi(y)\}$ stetig ist, kann auch noch angenommen werden, daß E offen ist. Sei nun ${}^*\mathcal{X}$ das zu $\mathcal{X}$ adjungierte Garbendatum auf X der Lösungen u der zur Wärmeleitungsgleichung adjungierten Differentialgleichung

$${}^*Du = 0 \quad \text{mit} \quad {}^*D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Durch Vorschalten der Abbildung ψ sieht man, daß $(X, {}^*\mathcal{X})$ ein streng harmonischer Raum ist. Wie man leicht nachrechnet, wird durch

$${}^*K(\xi, \tau, x, t) = K(x, t, \xi, \tau)$$

ein Darstellungsraum für $(X, {}^*\mathcal{X})$ definiert. Es bezeichne ${}^*\mathcal{S}_X$ die Menge der bezüglich $(X, {}^*\mathcal{X})$ superharmonischen Funktionen ≥ 0 und ${}^*R^E$ die zugehörige Operation: Reduzieren auf E . Da $K_{(\xi, \tau)}$ ein Potential mit

$$T_{K_{(\xi, \tau)}} = \{(\xi, \tau)\} \quad \text{ist, gilt}$$

$$(II) \quad R_{K_{(\xi, \tau)}}^E = K_{(\xi, \tau)} \quad \text{falls } (\xi, \tau) \in E$$

Nun ergibt sich aus der Gleichung

$$R_{K_{(\xi, \tau)}}^E(\bar{x}, t) = \int K(x', t', \xi, \tau) \mathcal{E}_{(x, t)}^E d(x', t'),$$

daß die Abbildung $(\xi, \tau) \longrightarrow R_{K_{(\xi, \tau)}}^E(x, t) \quad ((x, t) \in X)$

ein Element von ${}^*\mathcal{S}_X$ ist.

Aus (II) ergibt sich daher

$$(III) \quad R_{K_{(\xi, \tau)}}^E(x, t) \geq {}^*R_{K_{(\alpha, \epsilon)}}^E(\xi, \tau)$$

Sei nun $y = (\xi, \tau)$. Nach (I) gibt es $(x, t) \in X$ mit

$$R_{K(\xi, \tau)}^E(x, t) < K_{(\xi, \tau)}(x, t)$$

Nach (III) folgt daraus

$$*K_{(x, t)}(\xi, \tau) > *R_{K(\xi, \tau)}^E(\xi, \tau)$$

d.h. für den Raum $(X, *K)$ ist E dünn in y ,

d.h. es gibt eine Funktion $*v \in \mathcal{J}_X$ mit

$$\liminf_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in E}} *v(z) > *v(y)$$

Wie man leicht sieht, ist dann $v = *v \circ \psi$ ein Element von $\mathcal{J}_X$ mit

$$\liminf_{\substack{z \rightarrow \psi(y) \\ z \in \psi(E)}} v(z) > v(y)$$

also ist $\psi(E)$ dünn in $\psi(y)$.

Der Beweis von (b) $\implies$ (a) verläuft analog.

Bemerkung 3 Sei Dimension $n = 1$. In der Einleitung wurde unter (4) behauptet, daß Satz 6, II eine Verallgemeinerung des dort genannten Satzes von Widder ist. Um das einzusehen, ist es nach Satz 5 nur noch nötig zu wissen, daß für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ der Graph Φ_ξ der Kurve

$$\Phi_\xi(t) = (\xi, -t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

nicht dünn ist im Punkte $(\xi, 0)$. Nach [1], S.16 Beispiel 2 ist aber $(\xi, 0)$ regulärer Randpunkt eines achsenparallelen, offenen Rechtecks U_1 , dessen rechte Seite Φ_ξ ist, und eines achsenparallelen, offenen U_r , dessen linke Seite Φ_ξ ist. Daher ist $(\xi, 0)$ regulär für $U_1 \cup U_r$ und $\{U_1 \cap U_r\}$ dünn in $(\xi, 0)$ nach [1], 4.3.1.

Außerdem ist die Menge $\mathring{A}_0 = \{(x, t) \mid t < 0\}$ dünn in $(\xi, 0)$, da A_0 eine Absorptionsmenge ist, die $(\xi, 0)$ enthält und $A_0 \setminus \mathring{A}_0$ total dünn ist ([1], S.108).

Daher ist $\{U_1 \cap U_r \cap \mathring{A}_0\}$ nicht dünn in $(\xi, 0)$. Für eine

geeignete Umgebung V von $(\xi, 0)$ ist aber

$$\Phi_{\xi} \cap V = V \cap \left[U_1 \cap \left[U_r \cap \overset{\circ}{A}_0 \right. \right.$$

Also ist Φ_{ξ} nicht dünn in $(\xi, 0)$.

Vermutlich läßt sich dieses Resultat verallgemeinern für Kurven φ_{ξ} , die im Punkte o gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen genügen, und für die $\varphi_{\xi}(o) = (\xi, 0)$ gilt.

Bemerkung 4 Das Darstellungsproblem für harmonische Funktionen wurde nur gelöst für Räume der Form

$$R^n \times]\alpha, \gamma[\quad \text{mit} \quad -\infty < \alpha < \gamma$$

Nun gibt es aber auch nichtnegative harmonische Funktionen auf

$$R^n \times]-\infty, \gamma[\quad , \text{ z.B.}$$

$$(x, t) \longrightarrow (4\gamma(\gamma-t))^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{\|x-\xi\|^2}{4(\gamma-t)}\right) = K(o, \gamma, t)^{\frac{n}{2}} K(\xi, \gamma, x, t)^{-1}$$

Es wäre interessant zu wissen, ob sich ähnlich einfach harmonische Funktionen ≥ 0 für allgemeine parabolische Differentialgleichungen definieren lassen, und wie eine Integraldarstellung aller $h \in {}^+ \mathcal{H}(R^n \times]-\infty, \gamma[$ aussieht.

Literatur

- [1] H.Bauer, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture Notes in Mathematics 22, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer (1966).
- [2] ———, Mesures avec une image donnée. Revue Roum. Math.Pures Appl.11/7, 747-752 (1966).
- [3] R.M.Blumenthal and R.K.Gettoor, Markov processes and potential theory. New York, Academic Press (1967).
- [4] N.Bourbaki, Integration, Chap.I - IV (2^e edition), Act. Sci.et Ind.1175, Paris (1965).
- [5] ———, Integration, Chap.V (1^e edition), Act.Sci. et Ind. 1244, Paris (1956).
- [6] N.Boboc, C.Constantinescu and A.Cornea, On the Dirichlet problem in the axiomatic theory of harmonic functions. Nagoya Math.Journ.23,73-96 (1963).
- [7] C.Constantinescu, A topology on the cone of non-negative superharmonic functions. Revue Roum.Math. Pures Appl.10/9, 1331-1348 (1965).
- [7a] ———, Harmonic spaces, absorbent sets and balayage. ibid. 11/8, 887-910 (1966)
- [8] A.Friedman, Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs, N.Y. Prentice Hall (1964).
- [9] K.Gowrisankaran, Extreme harmonic functions and boundary value problems. Ann.Inst.Fourier 13/2, 307-356 (1963).
- [10] ———, Fatou-Naim-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot. Ann.Inst.Fourier, 16/2 455-467 (1966).
- [11] S.Guber, demnächst erscheinende Arbeit.
- [12] W.Hansen, Konstruktion von Halbgruppen und Markovschen Prozessen. Inventiones Math.3, 179-214 (1967).

- [13] R.M.Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. Ann. Inst. Fourier 12, 415-571 (1962).
- [14] W.Köhn und M.Sieveking, Zum Cauchyschen und Dirichlet-schen Problem. Mathematische Annalen (erscheint dem-nächst).
- [15] P.A.Meyer, Probabilités et potentiel. Act.Sci.et Ind. 1318, Paris (1966).
- [16] ———, Brelot's Axiomatic Theory of the Dirichlet Problem and Hunt's Theory. Ann.Inst. Fourier 13/2, 357-372 (1963).
- [17] P.Mustăţă, Sur la représentation de Poisson de solutions du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur. Revue Roum. Math. Pures Appl. 11/6, 673-691 (1966).
- [18] M.Sieveking, Integraldarstellung in gewissen Funk-tionenkegeln mit Anwendung auf superharmonische und exzessive Funktionen. Diplomarbeit an der Universität Hamburg (1965).
- [9] D.Widder, Positive temperatures on an infinite rod. Trans.Ann. Math. Soc.55, 85-95 (1944).

Lebenslauf

Am 28. April 1940 als erster Sohn des Rechtsanwalts Friedrich B.Sieveking und seiner Ehefrau Eva, geb. Mönckeberg, in Hamburg geboren. Vom sechsten bis zwölften Lebensjahr Besuch der Volksschule Binderstraße, später des altsprachlichen Hamburger Johanneums.

1957 Berufung des Vaters ans Bundesverwaltungsgericht und Übersiedlung nach Berlin. Dort 1959 Reifeprüfung am Gymnasium zu Berlin-Steglitz und anschließend zwei Semester Philosophiestudium an der FU Berlin. Dann Wechsel zur Fachrichtung Mathematik und an die Universität Hamburg. Vorlesungen bei Frau Prof.H.Braun, den Professoren E.Artin,H.Bauer und C.F.von Weizsäcker. 1963 Diplomvorprüfung, 1965 Abschluß des Studiums mit Diplom für Mathematik und Physik als Nebenfach. Seit 1965 als Assistent bei Herrn Prof. Bauer in Erlangen und verheiratet. 1967 Geburt eines Kindes.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990